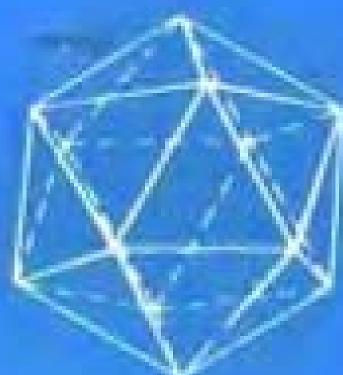
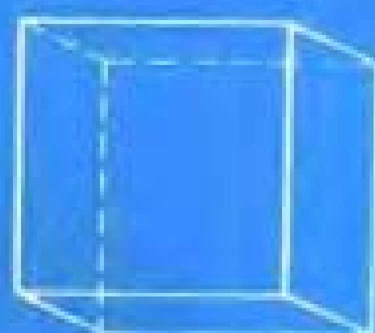
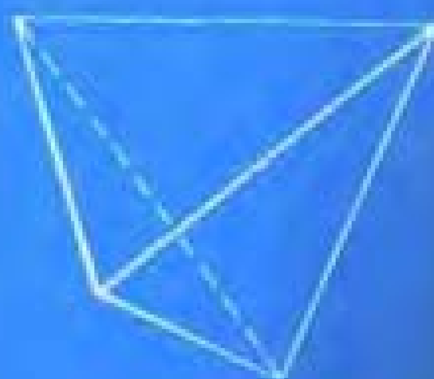
群论基础教程

侯云智 编著



山东大学出版社

群论基础教程

侯云智　编著

山 东 大 学 出 版 社

群论基础教程

侯云智 编著

责任编辑：孙秀英
封面设计：牛 钧
责任校对：张华芳

山东大学出版社出版
地址：山东省济南市山大南路 27 号
邮政编码：250100
山东省新华书店经销
济南市中印刷五厂印刷

850×1168 毫米 32 开
9.75 印张 253 千字
1997 年 6 月 第 1 版
1997 年 6 月第 1 次印刷
印数：1—2000
ISBN7—5607—1766—7/O·112
定价：16.00 元

前言

群论是对称性的一种抽象描述。从19世纪由法国数学家伽罗华（E・Galois）首次创立群的概念开始，至今已经历了一百多年。群论研究已取得很大进展，它不仅在近代物理各个学科中得到了广泛应用，甚至还波及到化学、生物学等诸多学科，并取得了许多非凡成就。它是现代物理学工作者必须系统了解的一种研究基础，许多高校已把群论列为物理系高年级学生的选修课和研究生必修基础课。

作者通过多年在山东大学物理系讲授群论课和多次举行的全国暑期群论讲习班，深切感受极需一本适合初学者的基础群论教材，把比较抽象的理论能深入浅出地介绍给初学者，并能尽快地应用群论方法做些研究。本书是在多次编写讲义的基础上，结合自身的教学和研究工作体会，并考虑到群论的一些新的发展和应用而编写的。

本书假定读者已具备了量子力学和线性代数的基础知识，在此基础上自成体系地介绍了物理学中常用的群论方法。为了便于学者了解和应用，不仅在各章之后都附有习题，读者可通过做习题加深对群论概念的理解；而且在第四章和第七章后面分别介绍了群论在量子力学和粒子物理应用方面的一些重要成果。由于篇幅所限和考虑到与群论并行的另一门研究生基础课（高等量子力学）已详细地介绍了旋转对称性的角动量理论，本书出版时略去了有关SO (3) 群那一章。因为本书是针对物理学科的研究生和理论物理工作者而写的，因此尽可能避免数学上的抽象完整证明，而力求理论阐述准确清楚，内容安排上由浅入深，多举实例，力求

本书通俗易懂，便于灵活应用。本书前四章可作为物理系研究生的通用群论教材，而后三章讲述李群、李代数及其应用，可做为理论物理专业研究生的群论补充教材，也可供理论物理工作者参考。

由于作者水平和时间所限，书中难免有错误和不妥之处，恳请读者予以指正。

最后作者衷心感谢佘寿绵和王承瑞教授对本书的关心，并特别感谢山东大学教材基金委员会和山东大学出版社对该书面世的支持。

侯云智

1997 年 5 月于济南

目　　录

第一章　抽象群概论

物理学家要描述物质世界，往往要借助于数学。而群论正是在近代物理学的各个领域中获得了日益广泛应用的重要数学分支，如固体物理、原子物理、核物理及粒子物理，甚至极其复杂的各种临界现象所以能得到迅速发展，都与群论的美妙而成功地应用密切相关。目前在物理学和物理化学的许多学科中，群论已成为不可缺少的数学基础。

数学家往往对抽象群理论的形式发展有兴趣，而在各个物理学科及量子化学的研究中，群表示理论的直接应用更为重要。因此，本章只讨论对理解群表示论所需要的那些抽象群概念，它的发展已有 160 多年的历史。

§1.1　集合与映射

1—1　集　合

集合是若干（有限个或无限个）可相互区别的具有一定特征的事物的总体，或简称为集。若事物 a 包含在集 A 中，则称 a 是 A 的一个元素，记为 $a\in A$。若集合 A 不包含元素 b，则记为 $b\notin A$ 或 $b\overline{\in} A$。

有限集合只包含有限个元素。如 n 个人、n 个点或 n 个操作；而可数无限集合含有无穷多个可数的客体。如所有的自然数集和奇、偶数集；一切实数、复数或沿圆周的连续转动等则是不可数无限集合。不包含任何元素的集合称之空集，通常记为$\varnothing$。

若 A 与 B 是两个集合，且 A 的任何元素又是 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，或称 B 是 A 的包集，记为

$$A \subseteq B \text{ 或 } B \supseteq A$$

若 A 是 B 的子集，且 B 的某些元素不包含在 A 中，则称 A 是 B 的真（固有）子集，记为

$$A \subset B \text{ 或 } B \supset A$$

A 与 B 的并集是 A 和 B 的全部元素集 C，记为

$$C = A \cup B$$

$$C = \{X \mid X \in A \text{ 或 } B\}$$

A 与 B 的交集是由 A 与 B 共有元素所构成的集合 C，记为

$$C = A \cap B$$

$$C = \{X \mid X \in A \text{ 和 } X \in B\}$$

A 与 B 之差集是属于集合 A，但不属于集合 B 的元素集 C，记为

$$C = A - B$$

$$C = \{X \mid X \in A \text{ 和 } X \notin B\}$$

集合 A 与 B 的并集、交集和差集可由图 1.1 形象地表示出来。

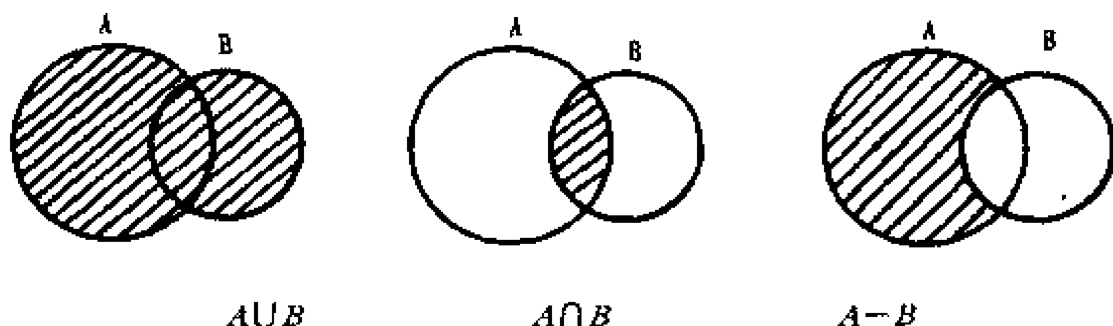


图 1.1　并集、交集和差集。

$A \cap B = \varnothing$。称之集合 A 与 B 不相交。若 $B \subset A$，则称 $A-B$ 为 B 的补集。

设 A，B 与 C 是三个任意集合，它们具有以下性质：

交换律　$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$

结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

吸收律　$(A\cup B)\cap A=A$

$(A\cap B)\cup A=A$

传递律　$A\subseteq B, B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$

反对称律　从 $A\subseteq B, B\subseteq A\Rightarrow A=B$

由两个集合 $A=\{a_i\}$和 $B=\{b_j\}$，可定义它们的直积集合，其元素以有序元素对(a_i,b_j)表示，并满足$(a,b)=(a',b')\rightleftharpoons a=a'$和 $b=b'$。直积集合记为

$$A\otimes B=\{(a_i,b_j)\,|\,a_i\in A, b_j\in B\}$$

若 A 和 B 分别包含 n 个和 m 个元素，则其直积集合将含有 $n\cdot m$ 个元素。图 1.2 可说明直积集合的含义。

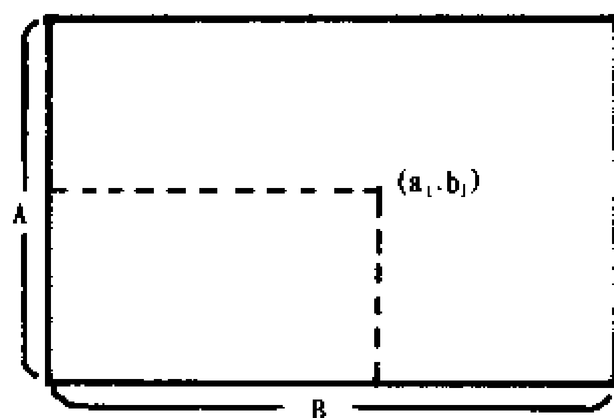


图 1.2　直积集合 $A\otimes B$

1—2　映　射

设有两个集合 A 与 B，如果存在一个对应法则 f，使之 A 中的任意元素 a 唯一地对应 B 中元素 b，则称 f 为从 A 到 B 的映

射，记为

$f: A \longrightarrow B$（或 $A \xrightarrow{f} B$）

就某个元素而言，可表示为 $b=f(a), a\in A, b\in B$。称 A 为映射 f 的定义域，而 $f(A)=\{f(a)|a\in A\}$ 为 f 的值域。称 b 为 a 的像，a 为 b 的一个像源。

如果 f 和 g 是两个定义域相同的映射，对任意元素 $a\in A$ 都有 $f(a)=g(a)$ 则称映射 f 和 g 相等，记为 $f=g$。若 A 的全体元素都以 B 的某个固定元素 b_0 为像，$f(a)=b_0$，则称 f 为以 b_0 为值的常数映射。而对任一元素 $a\in A$，都有 $f(a)=a$，则称 f 为 A 的恒等映射。如果映射 $f: A\longrightarrow B$ 满足 $f(A)=B$，则称 f 为 A 到 B 的满映射。

若一个映射使 A 中的不同元素对应着 B 中的不同元素，则称它为一一映射。一一满映射存在逆映射，因此又可以将此映射称为可逆映射或双向映射。

设映射 $f: A\rightarrow B$，$g: B\rightarrow C$，则可定义映射 $h: A\rightarrow C$，其中 $h(a)=g(f(a))$，则称 h 为 g 和 f 的乘积映射，记为

$$h=g\cdot f \tag{1.1.1}$$

显然乘积映射满足结合律：$h\cdot(g\cdot f)=(h\cdot g)\cdot f$

设 f 是 A_1 和 A_2 的直积集合到 B 的映射，则称 f 为二变元映射，可表示为：

$$f(a_1, a_2)=b, (a_1\in A_1, a_2\in A_2, b\in B)$$

集合到其自身的映射称之该集合上的变换。例如，xy 平面绕 Z 轴旋转，将使平面上一点坐标 $(x,y)\rightarrow(x',y')$。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (x, y\in R; 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

这种旋转给出了直积集合 $R\otimes R$ 上的一个变换。

对于任意一个由 A 到 B 的双向映射 f 都有对应的逆映射 f^{-1}。若 I_A 和 I_B 分别代表 A 与 B 的恒等映射，不难证明

$$f \cdot f^{-1} = I_B, \quad f^{-1} \cdot f = I_A \tag{1.1.2}$$

两个双向映射 f 和 g 的乘积映射的逆映射满足所谓的靴袜关系：

$$(f \cdot g)^{-1} = g^{-1} \cdot f^{-1} \tag{1.1.3}$$

1—3 等价关系

集合 $A=\{a,b,c\cdots\cdots\}$上元素间的等价关系（以$\backsim$表示）满足以下条件：

1° 自反律：$a\backsim a$，$a\in A$ 的任意元素；

2° 对称律：若 $a\backsim b$，则 $b\backsim a$；

3° 传递律：若 $a\backsim b$，$b\backsim c$，则 $a\backsim c$。

例如，设 A 是平面上所有三角形的集合。显然，三角形的相似关系就是一种等价关系，因为全体相似三角形满足以上三个条件。同样，三角形的全等关系和面积相等关系也都是等价关系。

但是，并非任何关系都是等价关系。例如，实数集合中的大于关系"＞"或小于关系"＜"等就不是等价关系。因为这类关系不存在自反律和对称律。

按照等价关系可将集合 A 的全部元素分为若干个等价类，给定一种等价关系，那么就可以把全部与某一元素 a 等价的元素归并成一类 A_a，同类元素必互相等价，故每一类将由其中任一元素决定，但是，如果取一个不属于类 A_a 的元素 b，则它所相应的类 A_b 不可能与类 A_a 有共同的元素，因为若假设有共同元素 c，则有$c\backsim a$ 和 $c\backsim b$，由等价关系的传递律可知 $a\backsim b$，即 $b\in A_a$，这与前题矛盾，故不同类不相交。每个等价类都是 A 的一个子集，A 的每个元素必属于某个等价类。因此 A 被分成了两两不相交的等价类。

将各个等价类整体作为一个元素，这些新定义元素的集合称为商集合。例如，设 N 是整数集合，m 是个特定整数。若整数 a 与 b 之差能被 m 整除，则称 a 与 b 对于模 m 同余，记为 $a\equiv b(m)$。不

难看出，“$\equiv$”是等价关系，这时的等价类就是对于模 m 的同余类。显然，a 所在的类是所有整数 $a+km$（k 为任意整数）构成的集合，记作 $\bar{a}$，则 N 所分成的等价类如下：

$$\bar{0}=\{\cdots\cdots,-2m,-m,0,m,2m,\cdots\cdots\},$$

$$\bar{1}=\{\cdots\cdots,-2m+1,-m+1,1,m+1,2m+1,\cdots\cdots\},\cdots\cdots$$

$$\overline{m-1}=\{\cdots\cdots,-m-1,-1,m-1,2m-1,\cdots\cdots\}。$$

由这 m 个同余类构成的集合就是商集合。当 m 为 2 时，则将 N 分成为偶数和奇数两个等价类。

§1.2 群和实例

2—1 群的定义

抽象地说，群是一些不同元素的集合 $G=\{g_i\}$。而这些元素按着赋予的组合规则（通常称之群的乘法，它们可以是加法、乘法、操作变换和矩阵乘法等），满足下述四个条件：

1° 封闭性：对 G 的任意二个元素 g_i、$g_j\in G$，在定义的群乘法运算下，合成的新元素仍是 G 中的某个元素，即 $g_i\cdot g_j=g_k\in G$；

2° 结合律：G 中任意三个元素 g_i、g_j 和 g_k，都有 $(g_i\cdot g_j)\cdot g_k=g_i\cdot(g_j\cdot g_k)$；

3° 存在唯一的单位元素 $e\in G$，对任意元素 $g_i\in G$，则有

$$e\cdot g_i=g_i\cdot e=g_i;$$

4° 任意元素 $g_i\in G$，都有相应的逆元素 g_i^{-1}，满足

$$g_i\cdot g_i^{-1}=g_i^{-1}\cdot g_i=e。$$

以上四点必须同时得到满足的集合才能构成一个群。群元素的个数叫做群的阶。阶为有限数的称之有限群；反之叫做无限群。无限群又可分为离散群和连续群。若群元素是可数无限的，称之离散群；而群元素是不可数无限的，则称之连续群。如果对群 G 的任

意两个元素 g 和 f 都满足可交换性($g \cdot f=f \cdot g$),则称 G 为阿贝尔(Abel)群。

例 1　由复数 $1, i, -1, -i$ 组成的集合,在普通乘法下形成四阶群。

例 2　所有实数集合在加法运算下形成一个连续群。其单位元素 $e=0$,而 $a^{-1}=-a$;而全体正实数集合在乘法运算下也形成连续群,其 $e=1, a^{-1}=1/a(a \in G)$。

例 3　沿圆周旋转 $2\pi/n$ 角整数倍的一切转动操作将构成一个 n 阶群;而沿圆周转 $\theta(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ 角的全体转动将形成一个连续群。这是个二维空间旋转群,通常记为 $SO(2)$。

例 4　绕三维空间某一固定点的全体转动也将形成一个连续群,通常记为 $SO(3)$。

例 5　若以矩阵乘法定义为群乘法,则全体 $n \times n$ 的实数非奇异矩阵集也将形成一个群,通常以 $GL(n,R)$ 标记它;而这些矩阵中,其行列式为 $+1$ 的子集也将形成一个群,以 $SL(n,R)$ 标记它。

前三个实例是阿贝尔群,后两个是非阿贝尔群。最简单的群是只有一个单位元素 e。稍微复杂一点的群只有二个元素 $\{e, a\}$,根据群的封闭性可推得 $a \cdot a=e$。如集合 $\{1, -1\}$,在乘法下形成二阶群;三阶群的三个元素为 $\{e, a, b\}$ 根据群的性质可以推断 $a \cdot b=b \cdot a=e$ 和 $a \cdot a=b$。因此对任何意义下的三阶群,它的三个元素必定是 $\{e, a, a^2\}$ 形式,且 $a^3=e$。其元素可写成为 $\{e, a, a^2, \cdots\cdots a^{n-1}\}$ 形式的 n 阶群称之 n 阶循环群,这里的 n 是满足 $a^n=e$ 的最小非零正整数。从以上讨论可以看出,三阶以下的群都是循环群,而循环群必是阿贝尔群。对于任意群元 $g_i \in G$,满足 $g_i^a=e$ 的最小正整数 a 称为 g_i 的阶数,显然,有限群的 a 都必为有限正整数。

我们特别感兴趣的是所研究的物理系统绕定轴或定点转动,反射、平移或全同粒子间置换等操作后,使物理系统保持不变的操作集合所构成的群,称它为变换群。它的每个元素都是一种对称变

换。不难证明，一个物理系统的一切对称变换之集合是满足群的四个条件。

2—2 乘法表

群元素之积可用一个方形表给出，此表叫做群的乘法表或拉丁方。设有一个6阶群 $G=\{e,a,b,c,d,f\}$，其乘法表如表1.1所示。此表给出 G 群的乘法规则。例如，$a\cdot b=d$，$f\cdot b=c$，$d\cdot f=e$ 等。

表1.1 一个6阶群的乘法表

左因子＼右因子	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	d	f	b	c
b	b	f	e	d	c	a
c	c	d	f	e	a	b
d	d	c	a	b	f	e
f	f	b	c	a	e	d

从表1.1看出，这是个非阿贝尔群，同时可知，它的某些子集，如$\{e,a\}$，$\{e,d,f\}$等在原定义的群乘法下又各自形成一个群，这就导致了下面子群的概念。

2—3 子群、陪集和群心

定义：群 G 的子集 H，如果对于 G 的乘法运算下也构成群，则子集 H 称为该群的一个子群。按定义，任何群都有两个显然子群：一个是只有单位元素$\{e\}$，另一个是群本身，又称这两个显然子群为平庸子群。除此以外的其它子群称之真子群或固有子群。

在上述群的实例中，不难看出绕定轴转 $2\pi/n$ 角整数倍的 n 阶循环群则是 $SO(2)$ 群的一个子群；而 $SO(2)$ 又是 $SO(3)$ 的一个子群。

循环子群是子群的重要例子，它是由群 G 的某个元素 $g_i \in G$ 的一切正整数次幂所组成。设 G 为有限群，则 g_i 的整数幂 $g_i, g_i^2, g_i^3 \cdots\cdots$ 不可能全不相同，必然存在 $g_i^m = g_i^n$，为明确起见，可设 $m > n$，就有 $g_i^{m-n} = g_i^k = e$。当 k 是最小的正整数时，则 $\{g_i, g_i^2, g_i^3, \cdots\cdots g_i^{k-1}, g_i^k = e\}$ 将给出该循环子群的全部元素。

定义：设群 G 有一个子群 $H = \{h_a\}$，假定元素 $u \in G$ 但 $\notin H$，则称集合 $uH = \{uh_1, uh_2, \cdots, uh_a, \cdots\}$ 为 u 生成子群 H 的左陪(旁)集。显然，左陪集元素个数等于 H 的阶(设 H 为有限群)。当 u 从右侧乘以 H 的所有元素时，将得到 u 生成 H 的右陪集 Hu，通常左、右两陪集不同。以表 1.1 的 6 阶群为例，子集 $H = \{e, d, f\}$ 是它的一个三阶子群，而 $aH = \{a, b, c\}, bH = \{b, c, a\}, cH = \{c, a, b\}$，可见这个 6 阶群相对子群 H 只有一个左陪集。

定义：同群 G 的任何元素都对易的全体元素集合，称之群 G 的中心，简称群心，记为 $Z(G)$。即如果 $g_0 \in Z(G)$，则 $g \cdot g_0 = g_0 \cdot g (g \in G)$。

不难证明，$Z(G)$ 是群 G 的一个阿贝尔子群。但反过来不一定正确。如表 1.1 的 6 阶群含有 2 阶阿贝尔子群 $\{e, a\}$，然而 $a \cdot b = d \neq b \cdot a = f$，可见子群 $\{e, a\}$ 并非它的群心。

2—4 群的同构与同态

定义：如果两个群 G 和 F 存在从 G 到 F 的一一满映射，且此映射维持群的乘法表不变，则称群 G 与 F 同构并记为 $G \cong F$。也就是说群 $G = \{g_a\}$ 和 $F = \{f_a\}$ 间存在满足以下两条件的映射 P：

1° $g_a \underset{P^{-1}}{\overset{P}{\rightleftharpoons}} f_a$；

2° 若 $g_a \underset{P^{-1}}{\overset{P}{\rightleftharpoons}} f_a, g_\beta \underset{P^{-1}}{\overset{P}{\rightleftharpoons}} f_\beta$，则 $g_a \cdot g_\beta \underset{P^{-1}}{\overset{P}{\rightleftharpoons}} f_a \cdot f_\beta$。

两个同构的抽象群具有同样的群法表，如果有两个群同时与第三个群同构，则这两个群也是彼此同构的，同构是一个等价关

系。有时又将彼此同构的群视为同一个抽象群的不同实现。例如，$G=\{1,i,-1,-i\}$在乘法下是个四阶群，而$F=\{I,A,B,C\}$在矩阵乘法下也形成一个4阶群，其中$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$若$1\Longleftrightarrow I$，$i\Longleftrightarrow A$，$-1\Longleftrightarrow B$和$-i\Longleftrightarrow C$，则$G$与$F$同构，它们是同一个4阶抽象群的两个不同实现。又如模为1的复数集合$G=\{e^{i\theta}\}$与$SO(2)=\{R_\theta\}$也是两个同构连续群。其中$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，而

$$R_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

定义：如果两个群G与F存在着从G到F的保持群乘法的满映射，则称群G与F同态，并表示为$G\backsim F$。

同态也是一种等价关系。它虽是满映射，但并不是一一映射，即F的一个元素可对应着G的多个元素。同构与同态的异同可用图1.3形象表示出来。

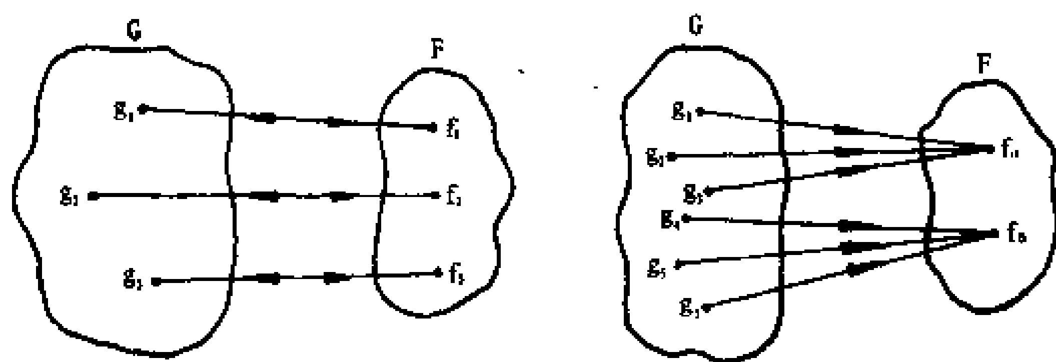


图1.3 同构与同态

例如，平面刚体变换群$M_2=\{T_{\theta,a,b}\}$与$SO(2)$是同态的，$SO(2)$的一个元素将对应M_2的无穷多个元素。对称变换$T_{\theta,a,b}$使之平面上坐标为(x,y)的一点变为坐标为(x',y')的另一点，其中

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\xrightarrow{T_{\theta,a,b}}\begin{pmatrix}x'=\cos\theta\cdot x-\sin\theta\cdot y+a\\ y'=\sin\theta\cdot x+\cos\theta\cdot y+b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a,b\in R\\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\end{pmatrix}$$

§1.3 群的基本性质

我们将抽象群所具有的重要性质归纳为三个基本定理，它们对研究群结构及表示理论起重要作用。

为讨论问题方便起见，以后用 g_α 表示 G 群的任意元素。对于 n 阶有限群，则 α 取从 1 到 n 这 n 个自然数；若 G 是连续群，可视 α 为群元素的实参数。当 α 在给定范围内改变(或称 α 跑过整个群)时，g_α 将给出且仅仅一次给出群 G 的所有元素。

定理一：设 u 为群 $G=\{g_\alpha\}$ 的任一元素，则当 α 跑过整个群时，$u\cdot g_\alpha$(或 $g_\alpha u$)将给出且仅仅一次给出群 G 的所有元素。这就是所谓重排定理。从上述的 6 阶群乘法表可看出，群元素在每一行(列)中的排列次序与其它行(列)中的排列各不相同。

证明：因为 $u\in G$，故 $u^{-1}\in G$，令 v 代表 G 的任一元素，则由群的封闭性，必有 $u^{-1}\cdot v=g_\alpha\in G$。两边同时左乘元素 u，则得 $v=u\cdot g_\alpha$，就是说群 G 的任一元素都可写成 $u\cdot g_\alpha$ 形式。

再证明 α 值不同时，$u\cdot g_\alpha$ 给出不同元素。假设 α 取两个不同值 α_1 和 α_2，则 $g_{\alpha_1}\neq g_{\alpha_2}$。如果这时对应的 $u\cdot g_{\alpha_1}=u\cdot g_{\alpha_2}$，则在此式两边左乘 u^{-1} 则得 $g_{\alpha_1}=g_{\alpha_2}$。这与 g_α 仅仅一次给出全部群元素相矛盾，故此定理证毕。

定理二：子群 H 的两个左(或右)陪集或者含有全同的元素，或者没有任何共同的元素。

证明：令 u_1H 和 u_2H 是子群 H 的两个左陪集。如果这两个左陪集有一个相同元素。

$$u_1\cdot h_{\alpha_1}=u_2\cdot h_{\alpha_2}$$

则有 $$u_2^{-1}\cdot u_1=h_{\alpha_2}\cdot h_{\alpha_1}^{-1}\in H$$

根据定理一可知，当 α 跑过子群 H 时，$u_2^{-1}\cdot u_1\cdot h_\alpha$ 将给出 H 的所有元素，即子集$(u_2^{-1}\cdot u_1)H$ 与子群 H 相等，从 H 的整体元素

看，则有

$$u_2 \cdot u_2^{-1} \cdot u_1 H = u_2 H$$
$$\Downarrow$$
$$u_1 H = u_2 H$$

两个右陪集也具有同样性质。此定理告诉我们：可以把群 G 的元素分成若干个不相交的左陪集 $u_1H, u_2H, \cdots\cdots, u_{l-1}H$ 和 H，即 G 的每个元素必定在某个左陪集 u_iH 之中。因为共有$(l-1)$个不同的左旁集（这里的$(l-1)$为方便而取的正整数，并不失掉一般意义），若 H 有 h 个元素，则 G 的阶数 $n=(l-1)\cdot h+h=l\cdot h$。整数 $l=n/h$ 称为 H 关于群 G 的指数。于是我们就证明了下面的拉格朗日定理。

定理三（拉格朗日定理）：有限群的阶必是其子群阶的整数倍。

由此定理可推知，阶为素数的群必是同阶的循环群。因为，对 n 阶群 G 的任一元素 g_a，必可以此构成一个 v 阶循环子群，$g_a^v=e$，其元素为$\{g_a, g_a^2, \cdots, g_a^v=e\}$，由定理三推知 $n=l\cdot v$，因 n 是素数，$v\neq 1$，故只有 $l=1, v=n$。

拉氏定理严格地限制了子群的可能阶数。例如，阶为 21 阶群，其真子群只能 3 阶或 7 阶。

§1.4 置 换 群

4—1 置换和宇称

置换群（对称群）是物理上最基本的群之一，它是由 n 个客体之间的一切可能交换所组成，通常以 S_n 标记。S_n 是有 $n!$ 个元素的有限群，但它的结构对研究经典群也很有帮助。本节先只讨论它的某些基本特性，以便研究有限群的结构。

置换是一组客体或符号自身间的 1—1 满映射。例如，分别标

码由1到7的七个全同粒子集合$C=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，其某个特定的置换是$P: j\to P(j)$，假定这里是$P(1)=7$，$P(2)=3$，$P(3)=1$，$P(4)=4$，$P(5)=6$，$P(6)=5$，$P(7)=2$，则这个置换元素就可简单地表示为

$$P=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 7 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 & 2\end{pmatrix}$$

置换P可理解为其上行的每个符号被映射到下一行对应的符号。

以一种封闭方式逐个相互轮换，这种特殊的置换称为循环，如上面的置换P使之$1\to7$，$7\to2$，$2\to3$，$3\to1$，就可看成1，7，2，3四个数码的一种循环，可简写为(1723)。而参于循环的数码个数称之循环长度，长度为1的循环通常可以略去，而长度为2的循环又称之对换。任何一个置换都可分解为没有公共数码的若干循环乘积——脱位循环积。例如上述的$P=(1723)\cdot(56)\cdot(7)=(1723)\cdot(56)$。显然，若置换写成脱位循环积时，每个循环因子的次序并不重要，通常总是按循环长度不递增次序排列，例如n个数码的某个置换写成长度为$l_1,l_2,\cdots,l_m$的脱位循环积，且$l_1\geqslant l_2\geqslant\cdots,\geqslant l_m$，$l_1+l_2+\cdots,+l_m=n$。这种将正整数$n$分解为一组不递增的正整数之和的方式称$n$的一个配分，可见任何一种置换都对应一个确定的配分。如置换P就对应配分[4,2,1]，而置换(123)(45)(67)对应配分[3,2,2]。置换

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix}=(1)(2)(3)(4)(5)\text{对应配分}[1,1,1,1,1]$$

$=[1^5]$。任何一个脱位循环积形式的置换也可复恢原双行形式。这种双行形式与数码的先后次序无关，重要的是要严格保持上下两行间数码的对应关系。例如，

$$(123)(45)(67)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 7 & 6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

对于非脱位循环积，其因子次序是不可随意改变的。如(13)(16)≠(16)(13)。因为

(13)(16){136}=(13){631}={613}

(16)(13){136}=(16){316}={361}

以归纳法不难证明，任何一个循环都可以写成对换积形式：

$$(1234,\cdots,n)=(1n)(1n\text{-}1)(1n-2)\cdots\cdots(12) \qquad (1.4.1)$$

长度为 l 的循环可有 l 个表示方式：

$$(12345\cdots\cdots l)=(234\cdots\cdots l1)=\cdots\cdots=(l12\cdots\cdots l-1)$$

所以一个循环分解为对换乘积形式也是多样的。

下面简单讨论置换的奇偶性。如果一个置换可分解为 N 个对换因子积，则置换宇称可定义为 $(-1)^N$，若 N 为奇(偶)数，则称该置换为奇(偶)置换。显然，对于置换群 S_n，其奇偶置换元素各为 $n!/2$个。所有偶置换构成 S_n 的一个子群，称之 n 次交代群，常记为 A_n。

4—2 凯雷(Cayley)定理

凯雷定理：任意一个 n 阶有限群必与 S_n 群的一个子群同构。

证明：设某个 n 阶群元素为$\{a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n\}$。根据重排定理，集合$\{a_ia_1,a_ia_2,\cdots\cdots,a_ia_n\}$必是原来的 n 个群元素的重新排列，因此必有如下的 1—1 对应关系

$$a_i \rightleftharpoons P_{a_i}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_i\cdot a_1 & a_i\cdot a_2 & \cdots & a_i\cdot a_n \end{pmatrix}$$

$$a_j \rightleftharpoons p_{a_j}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_j\cdot a_1 & a_j\cdot a_2 & \cdots & a_j\cdot a_n \end{pmatrix}$$

$$a_ia_j \rightleftharpoons P_{a_ia_j}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_i\cdot a_j\cdot a_1 & a_i\cdot a_j\cdot a_2 & \cdots & a_i\cdot a_j\cdot a_n \end{pmatrix}$$

(1.4.2)

要证明两者同构关系，除上面列出的元素一一对应外，还要证明这种对应满足群乘法，即 $P_{a_ia_j}=P_{a_i}\cdot P_{a_j}$。根据重排定理，因为

$$P_{a_i}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots\cdots & a_n \\ a_ia_1 & a_ia_2 & \cdots\cdots & a_ia_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_ja_1 & a_ja_2 & \cdots\cdots & a_ja_n \\ a_ia_ja_1 & a_ia_ja_2 & \cdots\cdots & a_ia_ja_n \end{pmatrix}$$

故有

$$P_{a_i}\cdot P_{a_j}=\begin{pmatrix} a_ja_1 & a_ja_2 & \cdots\cdots & a_ja_n \\ a_ia_ja_1 & a_ia_ja_2 & \cdots\cdots & a_ia_ja_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots\cdots & a_n \\ a_ja_1 & a_ja_2 & \cdots\cdots & a_ja_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots\cdots & a_n \\ a_ia_ja_1 & a_ia_ja_2 & \cdots\cdots & a_ia_ja_n \end{pmatrix} \tag{1.4.3}$$

比较(1.4.2)和(1.4.3)式，则有 $a_ia_j \Longleftrightarrow P_{a_ia_j}=P_{a_i}\cdot P_{a_j}$。因此，由 n 个置换元素 $\{P_{a_i}\}$ 形成置换群 S_n 的一个子群，称之 S_n 的一个正则子群。从凯雷定理的证明过程可以看出，S_n 群中，同构于 n 阶 G 群的那些子群都是正则子群。由于 n 阶群($n>3$)可以有不同的乘法结构，因此 S_n 可有多个 n 阶正则子群。

引理一：对某个正则子群而言，不存在两个不同的元素，同时将某个给定数码置换后变为同一个数码。

证明：设正则子群中两个不同元素 P_1 和 P_2 都使数码 $a\to b$，即 $P_1(a)=b, P_2(a)=b$，则有 $P_1(a)=P_1\cdot P_2^{-1}\cdot P_2(a)=P_1\cdot P_2^{-1}(b)=b$，这说明 $P_1\cdot P_2^{-1}$ 是单位元素，故有 $P_1=P_2$，这与前题相矛盾，故此引理得证。

引理二：正则子群中，若分解任一给定的置换元素为脱位循环积时，其每个循环因子的长度必相等。

证明：假定 P 是正则子群的一个元素，它可分解为长度是 l_1 和 l_2 的两个循环(设 $l_1<l_2$)。因长度为 l 的循环 P 有 $P^l=e$，故长度为 l_1 的循环 $P_1{}^{l_1}=e$，它使 P_1 内的数码不发生置换，而对长度为 l_2 的循环 P_2，其 $P_2^{l_1}\neq e$，它将使 P_2 内的数码次序改变，因为 $P^{l_1}=P_1^{l_1}\cdot P_2^{l_1}=P_2^{l_1}\neq e$，仍是该子群的一个元素，它作用在群元素上将使某些元素次秩不变，而另一部分元素次秩改变，由重排定理可

知，这是不可能的，因此只有 $l_1=l_2$。

§1.5 类、不变子群和商群

5—1 共轭元素和类

定义：对于元素 $a,b\in G$，若存在元素 $u\in G$，使之满足 $b=uau^{-1}$或 $a=u^{-1}bu$，则称 a 与 b 互为共轭元素，记为 $a\sim b$。而群 G 中全部共轭元素之集合形成该群的一个等价类，简称类。

不难看出，共轭是一种等价关系，自然可将群的元素按共轭关系分为若干类，同一类元素两两互相共轭，一类中的任一元素都可作为该类的代表元素，而不同类集不相交，即不包含公共元素。

若 a 是群的某一元素，k 是满足 $a^k=e$ 的最小正整数，则称 k 为元素 a 的阶。不难证明同类中的所有元素都是同阶的。

对于有限群 $G=\{g_\alpha\}$，要想找出以某个元素 $a\in G$ 为代表的那个类的全部元素，最基本的作法是计算 $g_\alpha a g_\alpha^{-1}$ 当 α 跑过整个群而得到的全体不同元素集就是与 a 同类的一切元素。由此可知，任何群的单位元素自成一类，而阿贝尔群的每个元素自成一类。

例如，置换群 S_3，它的六个元素为$\{e,(12),(13),(23),(123),(321)\}$，其对应的逆元素分别为$\{e,(12),(13),(23),(321),(123)\}$。单位元素 e 自为一类，而与(12)同类的元素为

1° $e(12)e^{-1}=(12)$；

2° $(12)(12)(12)^{-1}=(12)$；

3° $(13)(12)(13)^{-1}=(13)(132)=(13)(321)=(13)(13)(32)=(32)$；

4° $(23)(12)(23)^{-1}=(23)(231)=(23)(312)=(23)(32)(31)=(31)$；

5° $(123)(12)(123)^{-1}=(13)(12)(321)=(13)(31)(32)=(32)$；

6° $(321)(12)(321)^{-1}=(31)(32)(12)(231)=(31)(32)(12)(21)(23)=(31)$。

可见(12),(13)和(32)是同类元素,而同样可证(123)和(321)是同类元素,故 S_3 群的六个元素可分为三类

$$K_1=\{e\}$$

$$K_2=\{(12),(13),(23)\}$$

$$K_3=\{(123),(321)\}$$

我们已指出,置换群 S_n 的任一元素都唯一地对应 n 的一个配分。例如,置换 $P=(123)(46)(5)$,对应 6 的配分[3,2,1],而循环(123456)对应配分是[6],其单位元素 $e=(1)(2)(3)(4)(5)(6)$ 对应配分为$[1^6]=[1,1,1,1,1,1]$。下面讨论 S_n 的共轭类与配分的关系。因为

$$P=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n\end{pmatrix}$$

$$q=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ d_1 & d_2 & \cdots & d_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1 & c_2 & \cdots & c_n\\ f_1 & f_2 & \cdots & f_n\end{pmatrix}$$

则有

$$qPq^{-1}=\begin{pmatrix}c_1 & c_2 & \cdots & c_n\\ f_1 & f_2 & \cdots & f_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}d_1 & d_2 & \cdots & d_n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1 & d_2 & \cdots & d_n\\ f_1 & f_2 & \cdots & f_n\end{pmatrix}$$

可见,置换群某元素 P 的同类元素 qPq^{-1}就相当于将置换 P 的上下两行数码同时作 q 的置换。设 $P=(124)(36)(5)$,$q=(26)(3415)$,即

$$P=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 4 & 6 & 1 & 5 & 3\end{pmatrix}\qquad q=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 5 & 6 & 4 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

所以 $$qPq^{-1}=\begin{pmatrix}5 & 6 & 4 & 1 & 3 & 2\\ 6 & 1 & 2 & 5 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 1\end{pmatrix}$$
$$=(156)(24)(3)$$

显然，若把 P 写成脱位循环积形式时，其共轭元素 qPq^{-1} 则是将 P 内数码作 q 的置换，因此，S_n 群的同类元素必对应相同的配分，而对应 n 的某个配分 $[n_1,n_2,\cdots,n_n]$（$\Sigma n_i=n$）的所有置换集就构成 S_n 的一个类。如置换(12)(3)，(13)(2)和(23)(1)都对应配分[2,1]，故这三个置换是 S_3 的同类元素。自然，n 有多少种配分，则 S_n 的元素就可分解为多少个共轭类。[3]，[2,1]和 $[1^3]$ 是 3 的三种可能配分，故 S_3 群的元素可分为 3 类。而 S_4 存在五种对应的配分：[4]，[3,1]，[2,2]，$[2,1^2]$ 和 $[1^4]$，故它的元素可分为 5 类。

若 S_n 群的某个元素分解为脱位循环积的形式如下（为书写方便，这里的因子次秩与前相反）

$$\underbrace{(\,\cdot\,)\cdots(\,\cdot\,)}_{r_1}\underbrace{(\,\cdot\;\;\cdot\,)\cdots(\,\cdot\;\;\cdot\,)}_{r_2}\underbrace{(\,\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\,)\cdots(\,\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\,)}_{r_3}\cdots$$

这里 r_1 是长度为 1 的循环个数，r_2 是长度为 2 的循环个数…，且 $r_1+2r_2+\cdots+nr_n=n$，则它所对应的配分 $[r]=[n^{r_n},\cdots 3^{r_3},2^{r_2},1^{r_1}]$，该配分类元素个数为

$$n^{[r]}=\frac{n!}{r_1!\;\;2^{r_2}\cdot r_2!\;\;3^{r_3}\cdot r_3!\;\;\cdots n^{r_n}\cdot r_n!} \qquad (1.5.1)$$

可以证明，对于群的某个元素 $a\in G$，其满足 $h_a a h_a^{-1}=a$ 的一切元素集 $\{h_a\}$ 是 G 的一个子群 H^a。如果 g_α 和 g_β 是两个相对于 a 类的同一个元素，即 $g_\alpha a g_\alpha^{-1}=g_\beta a g_\beta^{-1}$，则 $g_\beta^{-1}\cdot g_\alpha a g_\alpha^{-1} g_\beta=a$，即 $g_\beta^{-1}\cdot g_\alpha\in H^a$，$g_\alpha\in g_\beta H^a$。这说明若 g_α 在左陪集 $g_\beta H^a$ 中，必有 $g_\alpha a g_\alpha^{-1}=g_\beta a g_\beta^{-1}$；相反，若 g_α 不是左陪集 $g_\beta H^a$ 的元素，必在 H^a 或其它左陪集中，这时 $g_\alpha a g_\alpha^{-1}\neq g_\beta a g_\beta^{-1}$，即 g_α 和 g_β 相对于 a 类的不同元素。因此，相对于子群 H^a 而言，有多少个不同的左陪集（H^a 也在内），则有多少个与 a 同类的不同元素由拉氏定理 $n=l\cdot h_a$ 知，l 是子群 H^a 产生的不同左陪集数，也就是与 a 同类的不同元素数。可见群的每类元素数目也是群阶数的因子。

5—2 不变子群

若 H 是 G 的一个子群，则 $H'=g_aHg_a^{-1}(g_a\in G)$ 也是 G 的一个子群，称 H' 和 H 互为共轭子群。例如 $\{e,(12)\}$ 是 S_3 的一个子群，其共轭子群则有 $\{e,(13)\}$ 和 $\{e,(23)\}$。

定义：设 H 是 G 的一个子群，如果它的所有共轭子群都是自身，则称 H 为 G 的不变子群，或称自共轭子群或正规子群。即对于任意元素 $g_a\in G$，都有

$$g_aHg_a^{-1}=H \text{ 或 } g_aH=Hg_a \qquad (1.5.2)$$

上式说明，对于任意元素 $g_a\in G$，若子群 H 的左右陪集恒相同，则称 H 为 G 的不变子群。

引理：子群 H 为群 G 的不变子群的充要条件是 H 包含 G 的某些类的全体元素。即如果 H 包含 G 的某类元素之一，则必包含该类的所有元素。根据不变子群的性质，此引理显而易见是成立的。其逆定理也是正确的。

任意一个群都有两个平庸不变子群，即 $\{e\}$ 和群本身。若除去平庸子群外，群 G 不再包含其它不变子群，则称 G 为单群(单纯群)。若 G 虽然含有真不变子群，但并不包含真不变阿贝尔子群，是称它是半单群。例如，S_3 群中，子群 $\{e,(12)\}$，$\{e,(13)\}$ 和 $\{e,(23)\}$ 不是 S_3 的不变子群，而 $\{e,(123),(321)\}$ 是 S_3 的三阶不变子群，故 S_3 既不是单群，也不是半单群。S_4 群包含 22 个真子群，其中只有两个不变子群，一个是 4 阶阿贝尔群，另一个是 12 阶非阿群，故 S_4 也不是单群。

5—3 商群(因子群)

首先讨论两个陪集的乘积运算。两个陪集相乘是第一个陪集的每个元素左乘第二个陪集的每个元素，按群的乘法所得到的全部不同元素之集合。

定义：将不变子群 H 及其全部陪集作为元素，以陪集乘法定义为群乘法而形成的新群称之 G 相对不变子群 H 的商群，通常记为 G/H。商群的单位元素为 H，各个陪集是商群的其它元素。

证明：因 H 为 G 的不变子群，可将 G 的元素按陪集划分

$$G=H\cup u_1H\cup u_2H\cup\cdots,HH=H;$$

$$(u_iH)(u_jH)=u_i(Hu_j)H=u_i(u_jH)H=(u_i\cdot u_j)HH=u_kH$$

$$H(u_iH)=(u_iH)H=u_iHH=u_iH;$$

$$(u_i^{-1}H)(u_iH)=(u_i^{-1}\cdot u_i)HH=H$$

因此集合 $\{H,u_1H,u_2H,\cdots\}$ 是一个群，而 $u_i^{-1}H$ 是商群元素 u_iH 的逆元素。商群的阶等于群 G 中子群 H 的指数。

仍以 S_3 群为例，我们知道 $\{e,(123),(321)\}$ 是 S_3 的一个不变子群，其唯一的陪集则是 $\{(12),(13),(23)\}$，若分别以 E 和 A 代表这个不变子群和陪集，则 $\{E,A\}$ 是 S_3 相对于不变子群 E 的商群。

从映射观点看，商群是群 G 向 G/H 的一种同态映射。

引理：若群 G 与 G' 同态，则 G 中以 G' 的单位元素 e' 为像的全部元素集构成 G 的一个不变子群，而 G' 的其它元素为 G 的该不变子群生成各个陪集的像——同态核定理。

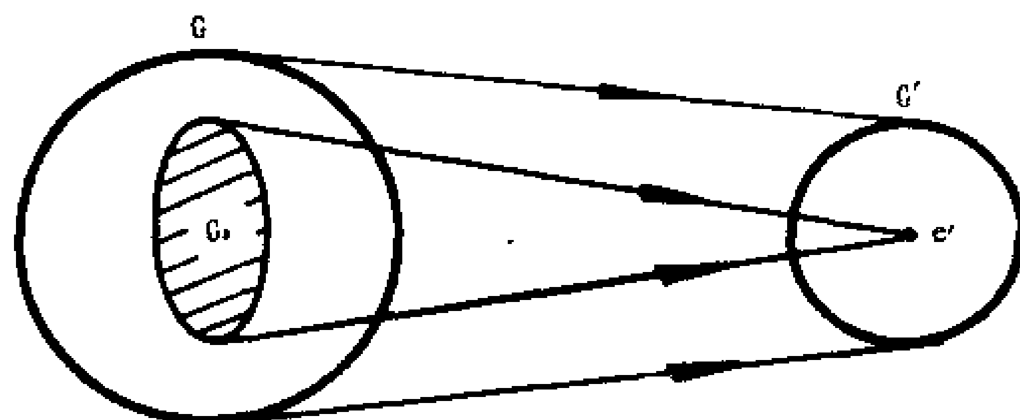


图 1.4　单位元素像原集 G_0 是 G 的不变子群

证明：设 G 的子集 G_0 对应 G' 中的单位元素 e' 的全部元素集，

如图 1.4。首先证明 G_0 是 G 的一个子群。任取两元素 $a,b\in G_0$，由于 G 与 G' 同态，故 $a\cdot b\rightarrow e'\cdot e'=e'$，即 $a\cdot b\in G_0$，满足封闭性，结合律自然是成立。任取 $C\in G_0$，则 $C\cdot e\rightarrow e'\cdot e''=e''$，而 $C\cdot e=C\rightarrow e'$，故 G 的单位元素 e 在 G' 的像必是 G' 的单位元素 e'，即 $G_0\supset e$。又因 $C\cdot C^{-1}\rightarrow e'\cdot g'=g'$，而 $C\cdot C^{-1}=e\rightarrow e'$，故 $C^{-1}\rightarrow g'=e'$，即 $C^{-1}\in G_0$。所以子集 G_0 是 G 的一个子群。

以下证明 G_0 是个不变子群。由于 G 与 G' 同态，$g_\alpha\in G$ 的任意元素，若它对应 G' 的 g'_β，则 g_α^{-1} 必对应 g'^{-1}_β。而对于任一元素 $a\in G_0$，则有

$$g_\alpha a g_\alpha^{-1}\longrightarrow g'_\beta e' g'^{-1}_\beta=g'_\beta\cdot g'^{-1}_\beta=e'$$

即 G_0 包含与 a 同类的全体元素，故 G_0 为 G 的不变子群。由此可推断两个同态单群必是同构的，否则较高阶群必有一同态核集为其真不变子群，这与单群定义相矛盾。

5—4 直积群和半直积群

设 $G_1=\{g_{1\alpha}\}$ 和 $G_2=\{g_{2\beta}\}$ 为两个任意群，e_1 和 e_2 分别为它们的单位元，考虑对集合 $(g_{1\alpha},g_{2\beta})$，并定义两个对集乘积为

$$(g_{1\alpha},g_{2\beta})(g_{1\alpha'},g_{2\beta'})=(g_{1\alpha}g_{1\alpha'},g_{2\beta}g_{2\beta'})$$

$$g_{1\alpha},g_{1\alpha'}\in G_1,g_{2\beta},g_{2\beta'}\in G_2$$

则对集 $(g_{1\alpha},g_{2\beta})$ 在上述对集乘积作为群乘法运算下将形成一个直积群 G，并记为 $G=G_1\otimes G_2$。

证明：因为 G_1 和 G_2 皆为群，故 $g_{1\alpha}\cdot g_{1\alpha'}\in G_1$，$g_{2\beta}\cdot g_{2\beta'}\in G_2$，故 $(g_{1\alpha}\cdot g_{1\alpha'},g_{2\beta}\cdot g_{2\beta'})\in G_1\otimes G_2$，满足封闭性条件。

考虑其三个对元乘积 $(g_{1\alpha},g_{2\beta})\cdot(g_{1\alpha'}\cdot g_{2\beta'})\cdot(g_{1\alpha''},g_{2\beta''})$，$\{(g_{1\alpha},g_{2\beta})\cdot(g_{1\alpha'},g_{2\beta'})\}\cdot(g_{1\alpha''},g_{2\beta''})=((g_{1\alpha}\cdot g_{1\alpha'})g_{1\alpha''},(g_{2\beta}\cdot g_{2\beta'})g_{2\beta''})$，$(g_{1\alpha},g_{2\beta})\cdot\{(g_{1\alpha'},g_{2\beta'})\cdot(g_{1\alpha''},g_{2\beta''})\}=(g_{1\alpha}(g_{1\alpha'}g_{1\alpha''}),g_{2\beta}(g_{2\beta'}g_{2\beta''}))$

既然 G_1 和 G_2 为群，必有 $g_{1\alpha}(g_{1\alpha'}g_{1\alpha''})=(g_{1\alpha}g_{1\alpha'})g_{1\alpha''}, g_{\beta}(g_{2\beta'}, g_{2\beta''})=(g_{2\beta}g_{2\beta'})g_{2\beta''}$，故直积群元满足结合律。其单位元为 (e_1,e_2)，由二对元乘积定义有

$(g_{1\alpha},g_{2\beta})\cdot(e_1,e_2)=(e_1,e_2)(g_{1\alpha},g_{2\beta})=(g_{1\alpha},g_{2\beta})$，$(g_{1\alpha},g_{2\beta})$ 的逆元为 $(g_{1\alpha}^{-1},g_{2\beta}^{-1})$，显然满足

$$(g_{1\alpha},g_{2\beta})(g_{1\alpha},g_{2\beta})^{-1}=(g_{1\alpha},g_{2\beta})(g_{1\alpha}^{-1},g_{2\beta}^{-1})=(e_1,e_2)。$$

若 G_1 和 G_2 分别为 g_1 和 g_2 阶的有限群，则两者的直积群 $G_1\otimes G_2$ 为 $g_1\cdot g_2$ 阶有限群，不难证明直积群有以下性质：

1° $G_1\otimes G_2$ 包含子群 $F_1=\{(g_{1\alpha})e_2)\}, g_{1\alpha}\in G$ 和 $F_2=\{(e_1, g_{2\beta})\}, g_{2\beta}\in G_2$；且 $F_1\cong G_1, F_2\cong G_2$；

2° 直积群的单位元 (e_1,e_2) 为两个子群 F_1 和 F_2 的唯一共有元素，即 $F_1\cap F_2=(e_1,e_2)$；

3° 子群 F_1 和 F_2 的元素可对易，即

$$(g_{1\alpha},e_2)(e_1,g_{2\beta})=(e_1,g_{2\beta})(g_{1\alpha},e_2)=(g_{1\alpha},g_{2\beta})\in G_1\otimes G_2$$

上式说明，直积群 $G=\{g_{1\alpha},g_{2\beta}\}$ 的任何元素皆可唯一表示为 F_1 一元素和 F_2 一元素的乘积。

既然同构的抽象群结构相同，因此也可重新定义直积群：凡同构于直积群 $G_1\otimes G_2$ 的群，则称其为 G_1 与 G_2 的直积群。设群 G 含有两个子群 $G_1=\{g_{1\alpha}\}$ 和 $G_2=\{g_{2\beta}\}$，若满足以下三个条件，则称 G 为 G_1 与 G_2 的直积群，并记为 $G=G_1\otimes G_2$。

1° G_1 和 G_2 的元素可对易；

2° G_1 和 G_2 的交集只有单位元素 e；

3° G 的每个元素能唯一写为 G_1 一元素与 G_2 一元素的乘积，即

$$g_{\alpha\beta}=g_{1\alpha}\cdot g_{2\beta},\quad g_{1\alpha}\in G_1, g_{2\beta}\in G_2, g_{\alpha\beta}\in G。$$

显然 G_1 和 G_2 皆为 G 的不变子群。如果一个较复杂群能作直积分解，则搞清每个较简单的因子群的性质，群的结构也就清楚

广，这是研究直积群的一个原因；同时直积群也是扩大群的基本方法，这在研究原子、晶体、原子核、粒子物理和统一规范理论中都得到广泛应用。例如，一个物理系统具有定点转动不变性，即 $SO(3)$ 群对称性，同时又有空间反演 I 不变性，即二阶群 $C_i=\{e,I\}$ 对称性，则该系统的对称性群为 $G=SO(3)\otimes C_i$。又如一个 6 阶循环群 $Z_6=\{e,a,a^2,a^3,a^4,a^5\}$，包含两个不变子群 $A=\{e,a^2,a^4\}$ 和 $B=\{e,a^3\}$，且 Z_6 的每个元素皆可表为两因子群元之积，故有

$$Z_6=A\otimes B=B\otimes A$$

如果群 G 的两个子群 $G_1=\{g_{1\alpha}\}$ 和 $G_2=\{g_{2\beta}\}$ 满足以下三个条件，则称 G 为两子群的半直积，并记为 $G=G_1 \textcircled{s} G_2$ 或 $G_1\otimes_s G_2$：

1° G_1 为 G 的不变子群；

2° 单位元 $e\in G$ 是 G_1 和 G_2 的唯一共有元素，即 $G_1\cap G_2=e$；

3° G 的每个元素 $g_{\alpha\beta}$ 可唯一地表为两子群元素的有序对乘积，即 $g_{\alpha\beta}=\langle g_{1\alpha},g_{2\beta}\rangle$，一般说来 G_2 不是 G 的不变子群，否则其半直积就退化为直积。以三个物体的置换群 S_3 为例，它包含一个不变子群 $G_1=\{e,(123),(321)\}$ 和二阶子群 $G_2=\{e,(12)\}$，由于 $\{ee,(123)e,(321)e,e(12),(123)(12),(321)(12)\}=\{e,(123),(321),(12),(13),(23)\}=S_3$，故 S_3 为这两个子群的半直积。显然，$G_2=\{e,(12)\}$ 并不是不变子群，当然 S_3 也可写成 G_1 与另外二个二阶子群的半直积。

习 题 一

1—1 设 A 和 B 是两个集合，试证明

(1) $(A-B)\cup(B-A)\cup(A\cap B)=A\cup B$

(2) $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$

1—2 若 a 为群 $G=\{g_\alpha\}$ 的唯一二阶元素，则有 $ag_\alpha=g_\alpha a$，$g_\alpha\in G$。

1—3 若 f 和 g 是两个可逆映射，则有

$(f \cdot g)^{-1} = g^{-1} \cdot f^{-1}$

1—4　如果右逆元素和右单位元素存在，则它们必同时也分别是左逆元素和左单位元素。即由 $g_i \cdot g_i^{-1} = e$ 和 $g_i \cdot e = g_i$，可推得 $g_i^{-1} \cdot g_i = e$ 和 $e \cdot g_i = g_i$。

1—5　证明群的单位元素和每个元素的逆元素都是唯一的。

1—6　根据拉氏定理，试证明最低阶的非循环群是4阶阿贝尔群。

1—7　若群 G 的两个元素 a 和 b 满足 $a^2 = b^3 = (a \cdot b)^2 = e$，试作出此群的乘法表。

1—8　设 H 为 G 的子群，$u \in G$，证明左陪集 uH 的所有元素的逆元素构成右陪集 Hu^{-1}。

1—9　证明群 G 的子集 H 能构成子群的充要条件是(1)若 $a,b \in H$，则 $a \cdot b \in H$；(2)若 $a \in H$，则 $a^{-1} \in H$。而对于有限群 G，其 H 为子群的充要条件只需条件(1)。

1—10　若 G 是 $2n$ 阶有限群，H 为 G 的 n 阶子群，试证 H 为 G 的不变子群。

1—11　设 a,b,c 是群的任意三个元素，证明 abc，bca 和 cab 是同阶元素。

1—12　若群的每个元素都是2阶的，证明此群必是阿群。

1—13　证明群 G 的两个不变子群的交集还是 G 的不变子群。

1—14　证明下列循环积恒等式：

$(1)(ab)(a\cdots xb\cdots y) = (a\cdots x)(b\cdots y)$

$(2)(ab)(a\cdots x)(b\cdots y) = (a\cdots xb\cdots y)$

其中 a,b,x,y 等是各不相同的数码。

1—15　利用递推法证明公式(1.4.1)。

1—16　若群 $G = H \otimes K$，试证明

(1)商群 G/H 与 K 同构。

(2)G 与直积因子群 H 或 K 同态。

(3)群 G 的类数等于两因子群类数之积。

1—17 以循环形式写出 S_4 群的各个类的全部元素；求出 S_4 所包含的不变子群。

1—18 试证明正六边形的 12 个对称操作构成一个群，并确定其共轭类。

1—19 若 A 和 B 是群的两个可对易元素，且 $A^2=B^3=E$，试证明此群可写成循环群。它是几阶群？

1—20 证明方程式(1.5.1)。

1—21 试证明阶为 P^2(P 为质数)的非循环群，除单位元外，其它每个元素的阶数皆为 P，它包含($P+1$)个不同的 P 阶子群。

1—22 群 G 的不变子群 H 的不变子群 K 是否一定是 G 的不变子群？

第二章　群表示论基础

在第一章中，我们讨论了抽象群的一些基本概念，这是学习群论的基础。然而，物理学家更关心群表示论，因为群是通过表示论才在自然科学中得到广泛应用的。实际上，群表示与数理方法中的各种特殊函数密切相关，因为群论是对称性的抽象描述，而特殊函数又各自表现出特定的对称关系，群表示论将有助这些问题的解决。例如，在静电学、声学、热学和类氢原子的量子力学等各种不同物理问题中，时常出现勒让德函数，它表明物理系统具有中心对称性；而写成$e^{im\varphi}$形式的三角函数，它表明系统具有定轴旋转对称性。实际上，它就是$SU(2)$群的一个表示。

物理学中令人感兴趣的往往是变换群。它们作用于物理系统相应的希尔伯特空间，该空间的每个矢量标志体系的一个状态，每个变换群元素对该空间矢量的作用对应一个矩阵，对这类矩阵性质的研究则属于群表示论。也就是说，群表示正是研究系统所具有的对称性变换群作用下，该系统的矢量或态函数的变换性质。在本章中我们只讨论有限群，但其大部份结论略加修正，对连续群或无限群也是同样适用的。

§2.1　群表示和表示空间

(一)　基本定义

对于任意群G，如果它与n维矢量空间L_n(常为复空间)上的一个线性变换矩阵群同态，则称该矩阵群为群G的一个线性表

示，简称表示。即对于任意群元 $g_\alpha, g_\beta \in G$，都有对应的 n 维方矩阵 $D(g_\alpha)$ 和 $D(g_\beta)$，且满足

$$g_\alpha \cdot g_\beta \longrightarrow D(g_\alpha) \cdot D(g_\beta) \tag{2.1.1}$$

矢量空间 L_n 称之群表示 $D(G)$ 的表示空间，而空间维数 n 称之该表示的维数。根据群表示的定义，若 $D(G)$ 是群 G 的一个表示，则对于单位元素 e 和其它任意群元 $g_\alpha, g_\beta \in G$，都有

$$\begin{aligned} &D(e)=I \\ &D(g_\alpha \cdot g_\beta)=D(g_\alpha) \cdot D(g_\beta) \\ &D(g_\alpha^{-1})=D(g_\alpha)^{-1} \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

I 是 n 维单位矩阵。关系式(2.1.2)以后将要常用到。

一个群可有若干个不同表示，如果群 G 与表示矩阵群同构，则称它为忠实表示。如果群 G 本身就是某个矢量空间的线性变换群，那么恒等映射自身就是一个忠实表示，称之自然表示。例如，全体 2×2 的幺模幺正矩阵集合是群 $SU(2)$ 的自然表示，然而，我们也将看到，常常需要考虑 $SU(2)$ 群的其它维数的各种表示。以下给出群表示的几个实例。

例 1　一般复 n 维线性群 $GL(n,c)$ 是个 $n\times n$ 的矩阵群。其自身即是一个表示，称之自然表示。

例 2　设 G 是个 n 阶群，任取群元 $g_\alpha \in G$，根据群乘法，则有 $g_\alpha \cdot g_1 = g_{\alpha_1}, g_\alpha \cdot g_2 = g_{\alpha_2}, \cdots\cdots$，由凯雷定理知，群 $G=\{g_\alpha\}$ 必同构于置换群 S_n 的某个正则子群，其群元为

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_i & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

若取 g_α 对应的表示矩阵为其第一列除第 α_1 行矩阵元为 1 外，其它皆为零，第 i 列中除第 α_i 行为 1 外，其它皆为零，…，则群 $G=\{g_\alpha\}$ 与矩阵群 $A=\{A_\alpha\}$ 同构，而 $(A_\alpha)_{\alpha_i i}=\delta_{\alpha_i i}$。故 $\{A_\alpha\}$ 是有限群 G 的一个忠实表示，通常称之正则表示。可见，每个 n 阶有限群都有一个 n 维正则表示，此表示矩阵决定于该群的乘法表。

设 G 是三阶循环群，$G=\{g_1=e,g_2=a,g_3=a^2\}$，且 $a^3=e$，则由乘法表不难写出每个群元对应的置换

$$g_1 \longleftrightarrow P_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\ g_2 \longleftrightarrow P_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$$

$$g_3 \longleftrightarrow P_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

显然，该群同构 S_3 群的一个子群$\{e,(123),(321)\}$。其正则表示为

$$D(g_1)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad D(g_2)=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$D(g_3)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

例 3　设系统绕 Z 轴旋转，使 xy 平面的位置矢量 $\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 按右手法则转 θ 角而变为新矢量 $\vec{r}'=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$。则线性变换 $R(\theta)$ 是 $SO(2)$ 群的一个元素。相应的变换矩阵为 $D(\theta)$。

$$\vec{r}\xrightarrow{R(\theta)}\vec{r}'=D(\theta)\vec{r},\quad D(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\tag{2.1.3}$$

不难证明，对于各种 θ 值的 2×2 矩阵 $D(\theta)(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$ 的集合构成一个矩阵群，它是 $SO(2)$ 的 2 维忠实表示。而 xy 平面是它的表示空间。

1—2　群算符和表示空间

令 L_n 是个 n 维矢量空间，而$\{\Phi_i\}$是 L_n 中的正交归一基。对于任意群元 $g_a\in G$，若有一个可对 L_n 中任意矢量发生作用的算符 $O(g_a)$ 与之对应，并且保持群乘法，则称 $O(g_a)$ 为群 G 的算符，而 L_n 称之群 G 的作用空间。如果任一群算符作用于 L_n 的矢量上仍

得到该作用空间的一个矢量，则称 L_n 为群 G 的不变空间。对于群的不变空间 L_n，其群算符对基矢的作用是

$$O(g_a)\Phi_i = \sum_{j=1}^{n} D_{ji}(g_a)\Phi_j, \quad (g_a \in G) \tag{2.1.4}$$

矩阵元 $D_{ji}(g_a)$ 可由下式给出 $D_{ji}(g_a) = (\Phi_j, O(g_a)\Phi_i)$ (2.1.5)

这里要强调指出，矩阵 $\{D(g_a)\}$ 并不一定与群 G 同构，因为这些矩阵未必全不相同。然而，给定群的一个不变空间，即给定其基矢 $\{\Phi_i\}$，由于矩阵集合 $\{D(g_a)\}$ 与群 G 同态，则必然对应群的一个表示。因此，每个群的不变空间也必是群的一个表示空间。

研究群的表示空间和群的表示是相辅相成的。因为，如果知道了表示空间的一组基矢，同时又知道群算符对基矢的作用规律，由(2.1.5)式立即可得到相应的群表示。所以，在将群表示论应用到物理问题时，常常称群表示空间的一组基矢为群的表示。

最后我们讨论一下同一个群在不同性质的表示空间中，其群算符的不同含义。设 $G=\{u_i\}$ 是普通三维空间 R_3 的对称变换群，即 R_3 中的任一矢量 $\vec{r}$ 在 u_i 作用下变为另一矢量 $\vec{r}' \in R_3$。设 $\psi(\vec{r})$ 是矢量 $\vec{r}$ 的标量函数，当 $\vec{r} \longrightarrow \vec{r}' = u_i \vec{r}$ 时，自然 $\psi(\vec{r})$ 也要相应改变。

定义：$\psi(\vec{r}) \xrightarrow{u_i \in G} \psi'(\vec{r}') = U_i\psi(\vec{r}) = \psi(u_i^{-1}\vec{r})$ (2.1.6)

我们所以要这样定义，是因为这不仅给计算带来方便，而且从物理上考虑更为合理。假定 ψ 是温度场，$\psi(\vec{r})$ 则是 $\vec{r}$ 点的温度，而 $\psi'(\vec{r})$ 则是系统经 u_i 变换后的 $\vec{r}$ 点温度。显然它应等于系统变换之前 $u_i^{-1}\vec{r}$ 点的温度，因为只有这个点才在 u_i 变换后变为 $u_i u_i^{-1}\vec{r} = \vec{r}$。当 $\vec{r} \longrightarrow \vec{r}' = u_j\vec{r}$，而 $\vec{r}' \longrightarrow \vec{r}'' = u_i\vec{r}' = u_i u_j \vec{r}$ 时，则(2.1.6)式定义的对应导出变换为

$$\psi(\vec{r}) \xrightarrow{u_j} \psi'(\vec{r}) = U_j\psi(\vec{r}) \xrightarrow{u_i} \psi''(\vec{r}) = U_i\psi'(\vec{r})$$

$=U_iU_j\psi(\vec{r})=\psi((u_iu_j)^{-1}\vec{r})$

若 $u_i\cdot u_j=u_k$，则上式可写成 $U_i\cdot U_j\psi(\vec{r})=\psi(u_k^{-1}\vec{r})=U_k\psi(\vec{r})$，故有 $U_i\cdot U_j=U_k$。可见同一个群 G 有同构的两组群算符。$\{u_i\}$是作用在群表示空间 R_3 的矢量 $\vec{r}$上，其对应的表示可从 u_i 对 $\vec{r}$的变换矩阵求得；而同构的导出变换群算符$\{U_i\}$是作用在函数空间上，其对应的群表示将由此函数空间的基函数完备集决定。

例如，若 G 是 R_3 空间的平移变换群，$T_{\vec{a}}$是平移群算符，它使 R_3 中任意矢量 $\vec{r}\longrightarrow\vec{r}'=T_{\vec{a}}\vec{r}=\vec{r}-\vec{a}$则其导出变换群算符对解析函数 $F(\vec{r})$作用，使之

$$F(\vec{r})\longrightarrow F'(\vec{r})=J_{\vec{a}}F(\vec{r})=F(T_{\vec{a}}^{-1}\vec{r})=F(T_{-\vec{a}}\vec{r})$$
$$=F(\vec{r}+\vec{a})$$

将 $F(\vec{r}+\vec{a})$在 $\vec{r}$点附近做泰勒级数展开，则有

$$F(\vec{r}+\vec{a})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})^nF(\vec{r})=e^{\vec{a}\cdot\vec{\nabla}}F(\vec{r})$$
$$=J_{\vec{a}}F(\vec{r})$$

故有 $J_{\vec{a}}=e^{\vec{a}\cdot\vec{\nabla}}=e^{i\vec{a}\cdot\vec{P}/\hbar}$。其中 $\vec{P}=\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$为量子力学中的动量算符。同理可讨论相对于 Z 轴的旋转变换群 $SO(2)=\{R(\theta)\}$，其相应的导出变换群算符为 $R(\theta)=e^{i\theta L_z/\hbar}$，$L_z$ 是量子力学中的角动量算符的 Z 分量。

1—3 物理学中的群表示和哈密顿群

量子论中，系统的状态以希尔伯特空间的矢量$|\psi>$来描述，而标量积$<\psi|\Phi>$是从态$|\Phi>$跃迁到态$|\Psi>$的几率振幅。因为只有跃迁几率$|<\Psi|\Phi>|^2$ 是可以测量的，如果$|\psi>$是物理系统的一个可能态，则系统的平移或转动也将是一种可能态。若以$\{g_a\}$代表这种变换，则在 H 空间中，相应的群算符 $U(g_a)$使态$|\psi>$变为

$U(g_\alpha)|\psi>$。由于态矢量可相差一个相因子，故其相应的表示应满足

$$D(g_\alpha \cdot g_\beta)=e^{i\varphi(g_\alpha,g_\beta)}D(g_\alpha)\cdot D(g_\beta) \tag{2.1.7}$$

称此表示为投影表示。由于时空的均匀性和各向同性，若对整个系统（包括测量仪器）进行转动或平移变换 g，则 $|\psi>\longrightarrow U(g)|\psi>$，$|\Phi>\longrightarrow U(g)|\Phi>$，但其跃迁几率在此变换下不变，故有

$$|<U(g)\psi|U(g)\Phi>|^2=|<\psi|\Phi>|^2 \tag{2.1.8}$$

即
$$<U(g)\psi|U(g)\Phi>=e^{i\theta(g)}<\psi|\Phi> \tag{2.1.9}$$

若不考虑相因子，则要求导出变换群算符 $U(g)$ 必须是幺正的（$<U\psi|U\varphi>=<\psi|\Phi>$）或反幺正的（$<U\psi|U\Phi>=<\Phi|\psi>$）。但两个反幺正算符仍是幺正算符，因此，我们只需研究相应物理系统的对称性群的幺正投影表示或幺正表示，不论在理论上或实际计算中，幺正算符和幺正表示都具有若干重要性质，至少对有限群，我们可以只讨论其幺正表示。物理上，除了对称性的时空变换群外，还有许多抽象群对研究微观结构提供了强有力的工具，如强相互作用的同位旋对称性群 $SU(2)$ 和强子结构的 $SU(3)$ 群等，将在群的应用中再仔细讨论。

从物理观点看，群表示与物理系统具有的对称性所导致的简并密切相关。设 A_x 是线性厄米的力学量算符，且是群 $G=\{U_i\}$ 下不变的，即 $U_iA_xU_i^{-1}=A_x$，$U_i\in G$。设其满足本征值方程

$$A_xf(x)=\lambda f(x)$$

将上式两边左乘 U，则得

$$UA_xU^{-1}\cdot Uf(x)=A_xUf(x)=\lambda Uf(x)$$

此式告诉我们，新函数 $Uf(x)$ 也是算符 A_x 的本征值为 λ 的本征态。如果 λ 是非简并的，则 $Uf(x)=Cuf(x)$，Cu 是个可能与群元有关的常数；而当 λ 是 μ 重简并时，将有 μ 个独立函数 $\{f_i(x)\}$ 满足

$$A_xf_i(x)=\lambda f_i(x),\qquad i=1,2,\cdots,\mu$$

而 $Uf_i(x)$必是这 μ 个函数的线性组合，故有

$$Uf_i(x)=\sum_{j=1}^{\mu}D_{ji}(u)f_j(x)$$

由于 μ 个 $f_i(x)$是线性独立的，不难推断

$$D_{ki}(u_1u_2)=\sum_{j=1}^{\mu}D_{kj}(u_1)D_{ji}(u_2)$$

即 $$D(u_1u_2)=D(u_1)D(u_2)$$

可见这些 μ 阶矩阵集与群 $G=\{U_i\}$同态，形成它的一个 μ 维表示。其简并度愈高，对应的表示维数也愈高。然而，我们知道简并度的高低与系统的对称性高低密切相关。例如，图 2.1 给出三个质量相同而形状各异的平行六面体在重力场中的势能分布。每个物体有六个稳定面，设 h 为其稳定放置时其重心离地面的高度，则 $V=mgh$。物体Ⅰ对称性最低，它有三个不等势能级，每个为 2 重简并，物体Ⅱ对称性较高，有两个势能级，其最低能级是 4 重简并，而物体Ⅲ对称性最高，它只有一个 6 重简并的势能级。

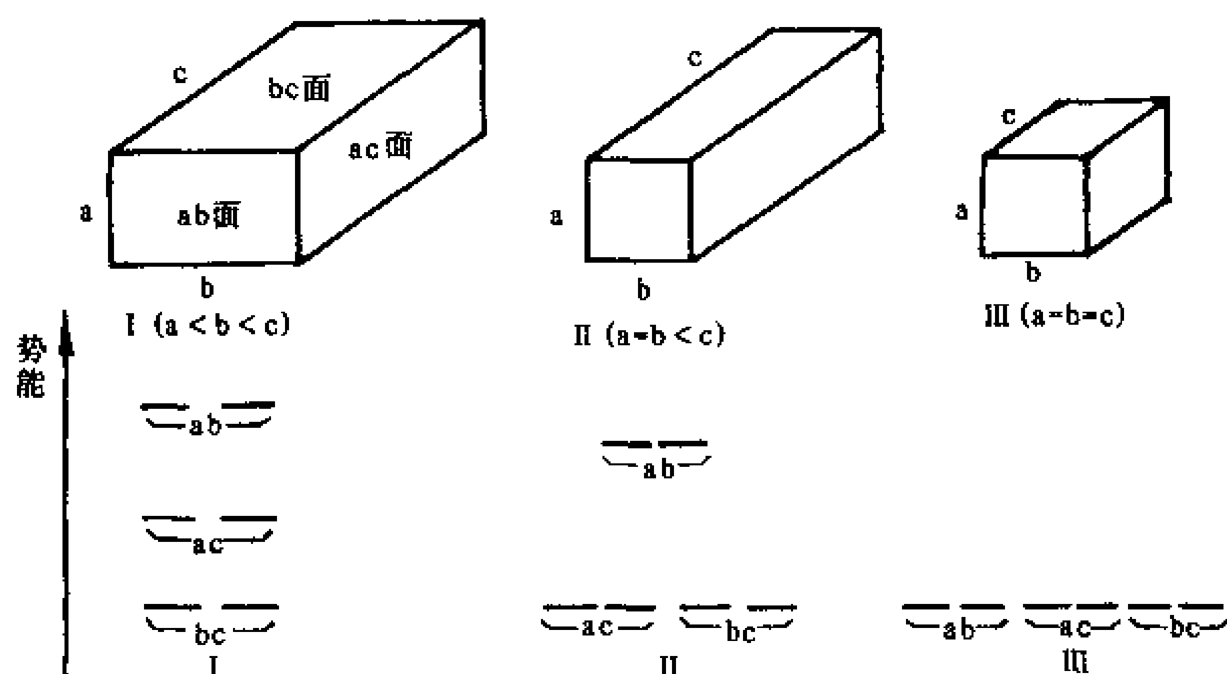


图 2.1 对称性和能级简并

使物理系统的哈密顿 H 保持不变的一切对称变换集合 $\{U_i\}$ 将构成一个所谓哈密顿群。显然，它满足 $[H,U_i]=0, U_i\in G$，因为只考虑幺正群算符，故 $U_i\sim e^{i\alpha_k\tau_k}$，这里 τ_k 是厄米算符，它对应某个力学量算符。由 $[H,U_i]=0$，可推得 $[H,\tau_k]=0$ 如果 τ_k 不显含时间 t，则由量子力学计算其平均值时对时间的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi,\tau_i\psi)=(\psi,\dot{\tau}_i\psi)+\frac{1}{i\hbar}(\psi,[\tau_i,H]\psi)=0 \qquad (2.1.10)$$

可见，给定系统一个哈密顿群，则对应某个力学量守恒。但对于系统的时间反演变换，就没有对应的守恒量，这是因为时间反演不是幺正变换的缘故。

§2.2 群表示的几个重要概念

2—1 等价表示

设 $D(G)=\{D(g_a)\}$ 是群 G 的一个表示，而 A 是与表示 D 同维的一个非奇异矩阵。则新的矩阵集合 $D'(G)=\{D'(g_a)\}$ 也是群 G 的表示，其中

$$D'(g_a)=AD(g_a)A^{-1}, g_a\in G \qquad (2.2.1)$$

称表示 $D(G)$ 和 $D'(G)$ 互为等价表示，记为 $D(G)\cong D'(G)$。

所谓等价表示，只是表示矩阵间的某种相似变换，这种变换将有无穷多个，然而由于它们存有某些共同的特征，今后将只考虑那些不等价表示。相似变换只是把表示空间的基矢变换为同一个表示空间一组新基矢，它们之间并没有实质性差别。

例如，我们已知 $D^{(1)}(R_\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ 是 $SO(2)$ 群的自然表示，而 $D^{(2)}(R_\alpha)=\begin{pmatrix}e^{i\alpha} & 0\\ 0 & e^{-i\alpha}\end{pmatrix}$ 也是 $SO(2)$ 的 2 维表示，但是

若取 $A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}$，则 $AD^{(1)}(R_\alpha)A^{-1}=D^{(2)}(R_\alpha)$，故 $D^{(1)}(R_\alpha)\cong D^{(2)}(R_\alpha)$。

2—2 表示的直和与直积

设 $D^{(1)}(G)$和 $D^{(2)}(G)$分别是群 G 的 n_1 和 n_2 维表示，则按矩阵的直和与直积定义的矩阵集显然也是该群的表示。

称 $D(G)=\{D(g_\alpha)\}$为 $D^{(1)}(G)$和 $D^{(2)}(G)$的直和表示，其中

$$D(g_\alpha)=\begin{bmatrix} D^{(1)}(g_\alpha) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(g_\alpha)\end{bmatrix},\quad g_\alpha\in G$$

它是个(n_1+n_2)维表示，记为 $D(G)=D^{(1)}(G)\oplus D^{(2)}(G)$。直和表示的概念可以推广。设 $D^{(1)}(G),D^{(2)}(G),\cdots,D^{(N)}(G)$同为群 G 的 N 个表示，则它们的直和仍是 G 的一个表示，其表示空间是这些表示空间的直和，表示矩阵是$(n_1+n_2+,\cdots+n_N)$维的准对角方阵。记为

$$D(g_\alpha)=D^{(1)}(g_\alpha)\oplus D^{(2)}(g_\alpha)\oplus\cdots\oplus D^{(N)}(g_\alpha)$$

$$=\sum_{\gamma=1}^{N}{}^{\oplus}D^{(\gamma)}(g_\alpha) \tag{2.2.2}$$

称 $T(G)=\{T(g_\alpha)\}$为表示 $D^{(1)}(G)$和 $D^{(2)}(G)$的直积表示，其中

$$T(g_\alpha)=D^{(1)}(g_\alpha)\otimes D^{(2)}(g_\alpha),\qquad g_\alpha\in G \tag{2.2.3}$$

在群的直积表示中，经常涉及矩阵的直积运算

$$(D^{(1)}(g_\alpha)\otimes D^{(2)}(g_\alpha))\cdot(D^{(1)}(g_\beta)\otimes D^{(2)}(g_\beta))$$

$$=(D^{(1)}(g_\alpha)D^{(1)}(g_\beta))\otimes(D^{(2)}(g_\alpha)D^{(2)}(g_\beta)) \tag{2.2.4}$$

$T(G)$是 $n_1\cdot n_2$ 维表示，记为 $T(G)=D^{(1)}(G)\otimes D^{(2)}(G)$

2—3　不变子空间、可约表示和不可约表示

设 $D(G)=\{D(g_\alpha)\}$是群 G 的一个 n 维表示，其表示空间为 L_n，如果 L_n 有个附有子空间 $L_m(m<n)$，其中的任一矢量 $x\in L_m$，若满足

$$D(g_\alpha)x\in L_m,g_\alpha\in G,x\in L_m$$

则称 L_m 为 L_n 在 $D(G)$作用下的一个不变子空间。而表示 $D(G)$是群 G 的可约表示。这时 $D(G)$对 L_m 作用将给出一个 m 维表示。如果 L_n 不存在这样的不变子空间，则称表示 $D(G)$是 G 的不可约表示。

定理：可约表示 $D(G)$的每个表示矩阵 $D(g_\alpha)$必等价于如下形式

$$D(g_\alpha)\cong\left(\begin{array}{c:c} D^{(1)}(g_\alpha) & N(g_\alpha) \\ \hdashline O & D^{(2)}(g_\alpha) \end{array}\right),\quad g_\alpha\in G$$

(2.2.5)

利用线性空间的基底变换，不难证明此定理。这里不再推导，感兴趣的读者可参阅有关专著(如 A. W. 约什书 § 3.2.1 或 H. Bacry 书 § 3.4)。

定义：设 $D(G)=\{D(g_\alpha)\}$是群 G 的 n 维表示，若 $D(G)$或其等价表示能写成如(2.2.2)式所示的一系列低维不可约表示的直和形式，则称 $D(G)$为完全可约表示。

从表示空间看，完全可约表示对应的表示空间可约化为一系列相互正交的不变子空间的直和。若其直和表示中每个不可约表示 $D^{(\mu)}(G)$出现 a_μ 次，($a_\mu\geqslant 1$ 的整数)，则完全可约表示等价于

$$D(G)\cong\sum_{\mu=1}^{N}{}^{\oplus}a_\mu D^{(\mu)}(G)$$

表示维数 $n=a_1n_1+a_2n_2+\cdots+a_Nn_N$。

我们对群的不可约表示特别感兴趣。因为有限群的任何可约表示都等价于一系列不可约表示的直和。只要晓得有限群的全部不可约表示，则其对称性群所包含的内在特征也就清楚了。一般讲来，两个不可约表示的直积表示是可约表示，利用下面介绍的特征标方法，可将任何一个可约表示约化为一系列不可约表示的直和。

2—4 直积群的表示

设群 G 是两个不变子群 $G_1=\{g_\alpha\}$ 和 $G_2=\{h_i\}$ 的直积。假定 $D^{(1)}=\{D^{(1)}(g_\alpha)\}$ 和 $D^{(2)}=\{D^{(2)}(h_i)\}$ 分别是 G_1 和 G_2 的表示，则其直积矩阵集 $D(G_1\otimes G_2)=D^{(1)}(G_1)\otimes D^{(2)}(G_2)=\{D^{(1)}(g_\alpha)\otimes D^{(2)}(h_i)\}$ 是直积群 $G_1\otimes G_2$ 的表示。根据表示的同态关系和直积群的不同因子群元可相互交换的性质，有

$$g_\alpha\cdot g_\beta\rightarrow D^{(1)}(g_\alpha)D^{(1)}(g_\beta)\,;h_i\cdot h_j\rightarrow D^{(2)}(h_i)D^{(2)}(h_j)$$

如果

$$g_\alpha\cdot h_i\rightarrow D^{(1)}(g_\alpha)\otimes D^{(2)}(h_i)\,;\quad g_\beta\cdot h_j\rightarrow D^{(1)}(g_\beta)\otimes D^{(2)}(h_j)$$

则有

$$\begin{aligned}(g_\alpha\cdot h_i)(g_\beta\cdot h_j)&=(g_\alpha\cdot g_\beta)\cdot(h_i\cdot h_j)\\&\rightarrow(D^{(1)}(g_\alpha)D^{(1)}(g_\beta))\otimes\\(D^{(2)}(h_i)D^{(2)}(h_j))&=(D^{(1)}(g_\alpha)\otimes D^{(2)}(h_i))\\&\quad\cdot(D^{(1)}(g_\beta)\otimes D^{(2)}(h_j))\end{aligned}$$

故 $D^{(1)}(G_1)\otimes D^{(2)}(G_2)$ 是 $G_1\otimes G_2$ 的一个表示，不难证明，若 $D^{(1)}$ 和 $D^{(2)}$ 分别是 G_1 和 G_2 的不可约表示，则 $D^{(1)}\otimes D^{(2)}$ 也是直积群 $G_1\otimes G_2$ 的不可约表示。

§2.3 幺正表示及其重要性质

定义：若 $D(G)=\{D(g_\alpha)\}$ 是群 G 的表示，其每个群元对应的

表示矩阵都是幺正的，则称 $D(G)$ 为幺正表示或酉表示，它满足

$$D(g_a)D(g_a)^{+}=D^{+}(g_a)D(g_a)=I$$

$$或\ D(g_a)^{+}=D^{-1}(g_a)=D(g_a^{-1}) \tag{2.3}$$

定理 1：有限群的任何表示都有等价的幺正表示。

证明：设 $D(G)=\{G(g_a)\}$ 为有限群 $G=\{g_a\}$ 的一个表示，我们要设法找一非奇异矩阵 S，使之 $T(g_a)=SD(g_a)S^{-1}$，$(g_a\in G)$ 都是幺正矩阵。为此，先定义厄米矩阵

$$H=\sum_{g_a\in G}D(g_a)^{+}D(g_a) \tag{2.3.2}$$

由矩阵代数可知，任何厄米矩阵可通过幺正变换完全对角化。若 U 是所需的幺正矩阵，则

$$UHU^{-1}=H' \tag{2.3.3}$$

将(2.3.2)代入上式，并令 $UD(g_a)U^{-1}=T(g_a)$ 则有

$$\begin{aligned}H'&=\sum_{g_a\in G}UD(g_a)^{+}U^{-1}UD(g_a)U^{-1}\\&=\sum_{g_a\in G}T(g_a)^{+}T(g_a)\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

由于 H' 是对角矩阵，$H'_{ij}=d_i\delta_{ij}$，故上式的第 k 个对角元为

$$\begin{aligned}H'_{kk}=d_k&=\sum_{g_a\in G}\sum_{j}[T(g_a)^{+}]_{kj}T_{jk}(g_a)\\&=\sum_{g_a\in G}\sum_{j}|T_{jk}(g_a)|^2\end{aligned}$$

由于上式中每一项都是非负的，故 $d_k\geqslant 0$，同时不难看出，只有对 G 的每个群元的表示矩阵的所有 j 值，都有 $T_{jk}(g_a)=0$ 时，$d_k=0$，而这相当于 $T(g_a)$ 的第 k 列元素全为零，即 $\det T(g_a)=0$。这与表示矩阵的非奇异性相矛盾，故只能 $d_k>0$，可见 H' 是正定的对角矩阵，故可对它做幂指数运算，$[(H')^m]_{kk}=d_k^m$，m 为实数。若取 $m=\frac{1}{2}$，则得矩阵 $(H'^{\frac{1}{2}})_{ij}=d_i^{\frac{1}{2}}\delta_{ij}$，其逆矩阵为 $(H'^{\frac{1}{2}})^{-1}_{ij}=d_i^{-\frac{1}{2}}\delta_{ij}$，记 $(H'^{\frac{1}{2}})^{-1}=H'^{-\frac{1}{2}}$。不难看出，$H'^{\frac{1}{2}}$ 和 $H'^{-\frac{1}{2}}$ 都是厄米的。如果取 S

$=H'^{\frac{1}{2}}U$，则可证明 $\Gamma(g_\alpha)=SD(g_\alpha)S^{-1}$ 是幺正的。因为由(2.3.3)，(2.3.4)式和重排定理得。

$$\begin{aligned}
\Gamma^+_{(g_\beta)}\Gamma_{(g_\beta)} &= (S^{-1})^+D^+(g_\beta)S^+SD(g_\beta)S^{-1} \\
&= H'^{-\frac{1}{2}}T^+(g_\beta)H'T(g_\beta)H'^{-\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{g_\alpha\in G}H'^{-\frac{1}{2}}T^+_{(g_\beta)}T^+(g_\alpha)T(g_\alpha)T(g_\beta)H'^{-\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{g_\alpha\in G}H'^{\frac{-1}{2}}T^+(g_\alpha g_\beta)[T(g_\alpha\cdot g_\beta)H'^{-\frac{1}{2}}] \\
&= \sum_{g_\gamma\in G}H'^{\frac{-1}{2}}T^+(g_\gamma)T(g_\gamma)H'^{\frac{-1}{2}} \\
&= H'^{\frac{-1}{2}}H'H'^{\frac{-1}{2}} \\
&= I,(g_\beta\in G)
\end{aligned}$$

由此可见 $D(G)$ 的等价表示 $\Gamma(G)=\{\Gamma(g_\beta)\}$ 是幺正表示。

定理 2：若群的幺正表示可约，则必是完全可约表示。

证明：设 $D(G)=\{D(g_\alpha)\}$ 是群 G 的 n 维幺正表示，其表示空间为 L_n。既然 $D(G)$ 是可约表示，故 L_n 必包含一个不变固有子空间 $L_m(m<n)$。设 L_k 是 L_m 的正交补空间$(k=n-m)$。而 L_m 中的任意矢量 x 必与 L_k 中的任意矢量 y 正交，即其内积 $(x,y)=0$。又因为 L_m 是 L_n 的相对群算符 $\{D(g_\alpha)\}$ 的不变子空间，且考虑到 $D(g_\alpha)$ 的幺正性，则有

$$(x,D(g_\alpha)y)=(D(g_\alpha)^+x,y)=(D^{-1}(g_\alpha)x,y) \quad (2.3.5)$$

由于

$$D(g_\alpha)^{-1}x=D(g_\alpha{}^{-1})x\in L_m,(x\in L_m)$$

故(2.3.5)式恒为零，即 $D(g_\alpha)y\in L_k$。也就是说 L_k 也是 L_n 的相对此群算符不变的一个子空间。也即表示空间 $L_n=L_m\oplus L_k$，故该表示可对应分解为两个表示之直和。如果子空间 L_m 和 L_k 还可约化，即它们可能还包含固有不变子空间，则这个约化过程还可继续下去。

推论：任何有限群的幺正可约表示等价于一系列不可约幺正表示的直和。即有限群的表示或自身不可约，或等价于不可约幺正表示的直和。

以上两个定理十分重要，它告诉我们有限群只需研究其幺正表示。而欲求有限群的一切表示，只需求该群的全部不等价不可约幺正表示，其它任何表示都可由这些幺正不可约表示的直和来构成，其形式为

$$D(G)\cong\begin{pmatrix} D^{(1)}(G) & & & O \\ & D^{(2)}(G) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & D^{(N)}(G) \end{pmatrix} \tag{2.3.6}$$

其中每个 $D^{(\mu)}(G)$ 都是 G 的幺正不可约表示，它可简单表示为

$$D(G)=\sum_{\mu=1}^{N}{}^{\oplus} a_\mu D^{(\mu)}(G) \tag{2.3.7}$$

称 a_μ 为不可约表示 $D^{(\mu)}(G)$ 的重复度。初看起来，似乎一个群的不等价不可约表示的数目没有任何限制，其实，对于有限群，情况决非如此。因为群的不可约表示要满足即将介绍的种种条件，这些条件不仅限制了它的不可约表示个数，而且也限制每个不可约表示的维数。这些条件对研究群论的实际应用十分重要，在以下几节中将研究不可约表示的这些性质。

§2.4 舒尔引理及群表示的正交关系

舒尔引理是舒尔(Schur)于 1905 年证明的，它们对研究群的不可约表示很有用途，由此可导出不可约表示的正交关系。

4—1 舒尔引理 I

预备定理：若矩阵 M 与幺正矩阵 U 对易，作厄米矩阵 $M_+ = M + M^+$ 和 $M_- = i(M - M^+)$，则 M_+ 和 M_- 也与矩阵 U 对易。

证明：由给定条件有

$$UM = MU \tag{2.4.1}$$

将上式两边取厄米共轭，并同时左乘和右乘 U，利用 U 的幺正性得

$$UM^+ = M^+U \tag{2.4.2}$$

将(2.4.1)和(2.4.2)式相加可推得

$$UM_+ = M_+U \tag{2.4.3}$$

若将这两式相减则有

$$UM_- = M_-U \tag{2.4.4}$$

故此定理得证。虽然 M 并不一定是厄米的，但当讨论常数矩阵时，将它视为厄米矩阵并不失掉一般性。因为如果厄米矩阵 M_+ 和 M_- 是常数矩阵(即对角元素为同一常数的对角矩阵)，则 $M = \frac{1}{2}(M_+ - iM_-)$ 也一定是常数矩阵。

引理 I：设 $D(G)$ 是群 G 的不可约表示，如果矩阵 M 与全部群元的表示矩阵都对易，则 M 必是常数矩阵。

证明：根据群表示的基本性质和上述的预备定理，认为 $D(G)$ 是幺正表示，而矩阵 M 是厄米的。设其表示空间为 L_n，则 M 是个 n 维方阵，既然它是厄米矩阵，故可考虑本征值问题。在 L_n 中，设 $\vec{r}$ 是 M 的本征值为 λ 的本征矢量，即

$$M\vec{r} = \lambda\vec{r} \tag{2.4.5}$$

而矢量 $\vec{r}$ 在某个群算符 $D(g_a)$ 作用下变为 L_n 中的一个新矢量 $\vec{r_a}$

$$\vec{r_a} = D(g_a)\vec{r} \tag{2.4.6}$$

由于 M 与 $D(g_\alpha)$对易，并利用本征方程(2.4.5)

$$M\vec{r}_\alpha = MD(g_\alpha)\vec{r} = D(g_\alpha)M\vec{r} = \lambda\vec{r}_\alpha \qquad (2.4.7)$$

可见新矢量$\vec{r}_\alpha$也是 M 的本征值为 λ 的本征矢量。当 g_α 跑过整个群时，$\vec{r}_\alpha$将给出表示空间 L_n 的一个不变子空间 $L_m(m\leqslant n)$。这是因为

$$D(g_\beta)\vec{r}_\alpha = D(g_\beta)D(g_\alpha)\vec{r} = D(g_\beta g_\alpha)\vec{r} = D(g_\gamma)\vec{r} = \vec{r}_\gamma \in L_m$$

然而，我们已假定 $D(G)$是个不可约表示，即 L_n 不包含任何固有不变子空间，故 $L_m = L_n$。若 L_n 中的任取一矢量 $\vec{R} = \sum_\alpha C_\alpha \vec{r}_\alpha$($C_\alpha$ 是迭加系数)，都满足

$$M\vec{R} = M\sum_\alpha C_\alpha \vec{r}_\alpha = \lambda\vec{R} \qquad (2.4.8)$$

由于 $\vec{R}$是空间 L_n 中任取的 n 维矢量，它都满足本征方程(2.4.8)，故矩阵 M 只能是常数矩阵。

$$M = \lambda I \qquad (2.4.9)$$

其中 λ 为实数，I 为 n 维单位矩阵。

推论：(1)该引理的逆定理也是对的。如果能找到一个非常数矩阵与群 G 的某个表示$\{D(g_\alpha)\}$的所有矩阵都对易，则此表示一定是可约的。

(2)阿贝尔群的每个群元的表示矩阵必与其它群元表示矩阵对易，故 $D(g_\alpha) = C_\alpha I$。即阿贝尔群只有 1 维不可约表示。

4—2　舒尔引理 Ⅱ

引理Ⅱ：设 $D^{(1)}$和 $D^{(2)}$分别是群 G 的 n_1 和 n_2 维不可约表示，若存在一个 $n_1\times n_2$ 的矩阵 M 满足 $D^{(1)}(g_\alpha)M = MD^{(2)}(g_\alpha)$，$g_\alpha\in G$，则矩阵 M 必是下面的两种可能性之一：(1)$M\equiv 0$，(2)$\det M\neq 0$，$D^{(1)}\simeq D^{(2)}$。

下面从表示空间和表示矩阵两种不同出发点来证明此引理。

证明 Ⅰ：设 L_1 和 L_2 分别是 $D^{(1)}$ 和 $D^{(2)}$ 的表示空间，空间 L_2 在 M 作用下将变为空间 L。令

$$ML_2=L \tag{2.4.10}$$

由于

$D^{(1)}(g_a)M=MD^{(2)}(g_a)$，对所有 $g_a\in G$ 故有

$$D^{(1)}L=D^{(1)}ML_2=MD^{(2)}L_2=ML_2=L \tag{2.4.11}$$

所以 L 是表示空间 L_1 的一个不变子空间。然而，已知 $D^{(1)}$ 是个不可约表示，L_1 不含有任何不变子空间，因此由(2.4.11)式可知，L 只能是个零空间或就是 L_1 本身。因 L_2 是个非零空间，L 为零空间的条件是 $M=0$。

当 $L=L_1$ 时，则 $ML_2=L_1$。这里 L_2 中一切满足 $My=0$ 的那些矢量 y 的集合将构成表示 $D^{(2)}$ 相应的表示空间 L_2 的一个不变子空间 K。这是因为

$$MD^{(2)}y=D^{(1)}My=0 \tag{2.4.12}$$

即若 $y\in K(My=0,y\in L_2)$，则 $D^{(2)}y=y'\in K$。然而，$D^{(2)}$ 是不可约表示，只能是或者 $K=L_2$，这时 L_2 中的任意矢量都满足 $My=0$，这只能 $M\equiv 0$；或者 K 本身是个零矢量空间，这时 $M\neq 0$，如果 $\det M\neq 0$，则 M^{-1} 存在，因此 $D^{(1)}\cong D^{(2)}$。此引理得证。

证明 Ⅱ：因为

$$D^{(1)}(g_a)M=MD^{(2)}(g_a)，对所有\ g_a\in G \tag{2.4.13}$$

取上式两边的厄米共轭得

$$M^+D^{(1)}(g_a)^+=D^{(2)}(g_a)^+M^+，g_a\in G \tag{2.4.14}$$

根据幺正表示性质 $D^+(g_a)=D^{-1}(g_a)=D(g_a^{-1})$，则有

$$M^+D^{(1)}(g_a^{-1})=D^{(2)}(g_a^{-1})M^+，g_a\in G \tag{2.4.15}$$

以 M 右乘上式得

$$M^+D^{(1)}(g_a^{-1})M=D^{(2)}(g_a^{-1})M^+M，g_a\in G \tag{2.4.16}$$

将(2.4.13)式两边左乘 M^+，再与(2.4.16)式比较得

$$M^+MD^{(2)}(g_a{}^{-1})=D^{(2)}(g_a{}^{-1})M^+M, \text{或者}$$

$$M^+MD^{(2)}(g_a)=D^{(2)}(g_a)M^+M, g_a\in G \tag{2.4.17}$$

因而厄米矩阵 M^+M 与不可约表示 $D^{(2)}$ 的所有表示矩阵对易，根据舒尔引理 I，M^+M 必为常数矩阵

$$M^+M=CI \tag{2.4.18}$$

当 $n_1=n_2=n$ 时，由(2.4.18)式得，

$$\det(M^+M)=(\det M)^*(\det M)=C^n \tag{2.4.19}$$

若 $C\neq0$，则 $\det M\neq0$，故 M^{-1} 存在。由(2.4.13)得

$$D^{(2)}(g_a)=M^{-1}D^{(1)}(g_a)M, g_a\in G \tag{2.4.20}$$

所以 $D^{(1)}\cong D^{(2)}$。若 $C=0$，则取(2.4.18)式的 i 行 i 列元素有 $\sum_j M_{ij}^+M_{ji}=0$，即

$$\sum_j M_{ji}^*M_{ji}=\sum_j |M_{ji}|^2=0$$

上式只有在每个 $M_{ji}=0(1\leqslant j\leqslant n)$ 时才成立。但 i 是任取的指标，故 $M\equiv0$。

当 $n_1\neq n_2$ 时，在不失去一般性下可取 $n_1<n_2$。给矩阵 M 添上 (n_2-n_1) 行零，将 M 变为 n_2 维方阵 N

$$N=\overbrace{\begin{bmatrix} M \\ \cdots\cdots\cdots \\ O \end{bmatrix}}^{n_2}\begin{matrix}\}n_1 \\ \}n_2-n_1\end{matrix} \tag{2.4.21a}$$

而矩阵 N^+ 为

$$N^+=\begin{bmatrix} \overbrace{M^+}^{n_1} & \vdots & \overbrace{O}^{n_2-n_1} \end{bmatrix}\}n_2 \tag{2.4.21b}$$

由矩阵乘法很容易得到 $N^+N=M^+M$，即

$$(\det N^+)(\det N)=C^n$$

这里用到了(2.4.19)式，并假定 $n_2=n$。然而，由(2.4.21)式可知，$\det N^+$ 和 $\det N$ 恒为零，从而有 $C=0$，即 $M^+M=0$。再一次取第 i 行 i 列元素，立即可推得 $M\equiv 0$。故引理Ⅱ得证。

4—3 不可约表示第一正交关系

设 G 是个 g 阶有限群，而 $D^{(\mu)}(G)$ 和 $D^{(\gamma)}(G)$ 是 G 的两个不可约表示，其表示维数分别为 n_μ 和 n_γ。构造矩阵 M

$$M=\sum_{\alpha=1}^{g} D^{(\gamma)}(g_\alpha)XD^{(\mu)}(g_\alpha^{-1}) \tag{2.4.22}$$

X 是任意一个与群元无关的 $n_\gamma\times n_\mu$ 矩阵。将上式两边分别左乘 $D^{(\gamma)}(g_\beta)$ 和右乘 $D^{(\mu)}(g_\beta^{-1})$，则由群的基本性质得

$$\begin{aligned}D^{(\gamma)}(g_\beta)MD^{(\mu)}(g_\beta^{-1})&=\sum_{\alpha=1}^{g} D^{(\gamma)}(g_\beta g_\alpha)XD^{(\mu)}((g_\beta g_\alpha)^{-1})\\&=M\end{aligned}$$

即

$$D^{(\gamma)}(g_\beta)M=MD^{(\mu)}(g_\beta),\ g_\beta\in G \tag{2.4.23}$$

当 $D^{(\mu)}$ 和 $D^{(\gamma)}$ 是同一不可约表示时($\mu=\gamma$)，则由舒尔引理Ⅰ得

$$M=C(X)I$$

而当 $D^{(\mu)}$ 和 $D^{(\gamma)}$ 是不等价的两个不可约表示时($\mu\neq\gamma$)，则由舒尔引理Ⅱ推断 $M=0$。综合上述，M 可表示为

$$M=C(X)I\delta_{\mu\gamma}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{g} D^{(\gamma)}(g_\alpha)XD^{(\mu)}(g_\alpha^{-1})=C(X)I\delta_{\mu\gamma} \tag{2.4.24}$$

常数 $C(X)$ 自然与矩阵 X 的选取有关，既然 X 是任意的，故我们可取 X 只有第 j 行第 k 列矩阵元为 1，其余全为 0，即 $(X)_{l'l'}=\delta_{l'j}\delta_{l'k}$，则常数 $C(X)$ 只与指标 j,k 有关。取式(2.4.24)的第 i 行第 l

列矩阵元，则有

$$\sum_{\alpha=1}^{g}\sum_{i',l'} D^{(\gamma)}_{ii'}(g_\alpha) X_{i'l'} D^{(\mu)}_{l'l}(g_\alpha^{-1}) = \sum_{\alpha=1}^{g} D^{(\gamma)}_{ij}(g_\alpha) D^{(\mu)}_{kl}(g_\alpha^{-1})$$
$$= C_{jk}\delta_{il}\delta_{\mu\gamma} \qquad (2.4.25)$$

为了求常数 C_{jk}，取 $\mu=\gamma$，$l=i$，然后对上式两边对 i 求和，因为

$$\sum_{i} D^{(\mu)}_{ij}(g_\alpha) D^{(\mu)}_{ki}(g_\alpha^{-1}) = \sum_{i} D^{(\mu)}_{ki}(g_\alpha^{-1}) D^{(\mu)}_{ij}(g_\alpha)$$
$$= D^{(\mu)}_{kj}(g_\alpha^{-1}\cdot g_\alpha) = I_{kj} = \delta_{kj}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{g}\delta_{kj} = g\delta_{kj},\ \sum_{i=1}^{n_\mu}\delta_{ii} = n_\mu$$

将这些结果代入(2.4.25)式，则求得

$$C_{jk} = \frac{g}{n_\mu}\delta_{kj}$$

最后，得到群的不可约表示的第一个正交关系

$$\sum_{\alpha=1}^{g} D^{(\gamma)}_{ij}(g_\alpha) D^{(\mu)}_{kl}(g_\alpha^{-1}) = \frac{g}{n_\mu}\delta_{\mu\gamma}\delta_{jk}\delta_{il} \qquad (2.4.26a)$$

若 $D^{(\mu)}$ 是幺正表示，则上式可写成指标更对称的形式

$$\sum_{\alpha=1}^{g} D^{(\mu)*}_{lk}(g_\alpha) D^{(\gamma)}_{ij}(g_\alpha) = \frac{g}{n_\mu}\delta_{\mu\gamma}\delta_{il}\delta_{kj} \qquad (2.4.26b)$$

方程(2.4.26)通常又称做群的不可约表示的大正交性定理。它在群表示论中占有支配地位。以下对其包含的深刻含义做些扼要讨论。

当给定一组指标(μ,i,j)时，则 $D^{(\mu)}_{ij}(g_\alpha)$ 可看做群元 g_α 的函数，不同的 g_α，将对应不同的 $D^{(\mu)}_{ij}(g_\alpha)$，故可称它为群上函数。由正交关系(2.4.26)不难推得

$$\sum_{\alpha=1}^{g} D^{(\mu)}_{ij}(g_\alpha) D^{(\mu)*}_{ij}(g_\alpha) = \frac{g}{n_\mu}\text{，或者}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{g}\left(\sqrt{\frac{n_\mu}{g}}D^{(\mu)}_{ij}(g_\alpha),\ \sqrt{\frac{n_\mu}{g}}D^{(\mu)*}_{ij}(g_\alpha)\right)$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{g}\left|\sqrt{\frac{n_\mu}{g}}D_{ij}^{(\mu)}(g_\alpha)\right|^2=1 \tag{2.4.27}$$

类此于普通 n 维矢量空间中的每个基矢 $\vec{r^0}$，它不仅两两正交，且满足 $(\vec{r^0},\vec{r^0})=\sum_{i=1}^{n}|r_i^0|^2=1$，故式(2.4.27)暗示存在一个所谓的 g 维群空间，对于一组固定指标 (μ,i,j)，就有 g 个量 $\left\{\sqrt{\frac{n_\mu}{g}}D_{ij}^{(\mu)}(g_\alpha)\right\}$，$\alpha=1,2,\cdots,g$，它们是该群空间中群上函数的 g 个分量。对于每个不可约表示 $D^{(\mu)}$，因 $1\leqslant i,j\leqslant n_\mu$，故每个不可约表示将有 n_μ^2 个正交归一的群上函数。若群 G 共有 N 个不等价不可约表示，就有 $\sum_{\mu=1}^{N}n_\mu^2$ 个正交归一群上函数。然而，我们知道这个群空间是 g 维的，故最多能有 g 个线性独立的群上函数。因此有关系

$$\sum_{\mu=1}^{N}n_\mu^2\leqslant g \tag{2.4.28}$$

式(2.4.28)说明，对于有限群，只可能存在着有限不等价不可约表示，而每个不可约表示的维数 $\leqslant\sqrt{g}$。后面将证明(2.4.28)式的等号成立。通常又称群上函数 $D_{ij}^{(\mu)}$ 为群空间的表示矢量。

在此正交关系证明过程中，涉及群的关键一步是用到群的重排定理。即给定任一群元 g_β，当 g_α 跑过整个群时，$g_\beta g_\alpha$ 也将跑过整个群。因此对应的表示矩阵才有 $\sum_{\alpha=1}^{g}D^{(\mu)}(g_\alpha)=\sum_{\alpha=1}^{g}D^{(\mu)}(g_\beta)D^{(\mu)}(g_\alpha)$。而对于连续群，群参数 α 是连续的，只要将对群元求和改为求积分，且积分有意义，那末，对这样的连续群，以上关系同样成立。

§2.5 群表示的特征标

特征标是群表示论中一个非常重要的概念，其许多特性将给

表示论的研究带来极大方便。当应用群论研究物理问题时，往往并不需要晓得具体的群表示矩阵，而只需要知道该物理系统具有的对称性群表示的特征标，则可使问题得到令人满意的解决，因此在不少群论专著中，为了使用方便，常常给出有限群的特征标表。

我们曾指出，只需关心有限群的那些不等价不可约的幺正表示。因为，给定一个表示空间，群表示矩阵并不唯一确定，它们依赖于基矢的选取和编序，然而，对于同一表示空间，这些不同基矢所对应的表示是相互等价的。那末如何判断两个表示是否等价呢？这就要设法定义一个与相似变换无关的量，由线性代数知道，矩阵的本征值、矩阵的行列式以及其阵迹等都与相似变换无关，而其中以阵迹最为简便。全体表示矩阵的阵迹将成为该表示的特征量，它与基矢的选择和编序无关。

5—1 特征标的定义及其性质

定义：设 $D(G)=\{D(g_a)\}$ 是群 G 的一个 n 维表示，则每个表示矩阵之阵迹为

$$X(g_a)=T_rD(g_a)=\sum_{i=1}^{n}D_{ii}(g_a),\quad g_a\in G \tag{2.5.1}$$

称 $X(g_a)$ 为群元 g_a 的表示矩阵的特征标。所谓表示 $D(G)$ 的特征标，是该表示的全体表示矩阵的特征标之集合 $\{X(g_a)\}$，$g_a\in G$。

性质 1　等价表示的特征标相同。

因为，若表示 $\{D'(g_a)\}$ 和 $\{D(g_a)\}$ 等价，则必存在一个非奇异矩阵 A 满足

$$D'(g_a)=AD(g_a)A^{-1},\quad g_a\in G \tag{2.5.2}$$

$$\begin{aligned}X'(g_a)&=T_rD'(g_a)=T_r[AD(g_a)A^{-1}]\\&=T_r[D(g_a)A^{-1}A]\\&=T_rD(g_a)=X(g_a),\quad g_a\in G\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

可见互为等价表示的特征标相同。其逆定理也成立，即如果两

个同维表示具有相同的特征标，则它们一定是等价表示。因此可根据特征标来方便地判断两个同维表示是否等价。

性质 I　对于群 G 的某个表示，其同类元素对应特征标相等。

设群元 g_i 与 g_j 是同类元素，则必有群元 g_k 满足 $g_i = g_k g_j g_k^{-1}$，对应表示矩阵的特征标有

$$
\begin{aligned}
X(g_i) &= T_r D(g_i) = T_r D(g_k g_j g_k^{-1}) \\
&= T_r[D(g_k)D(g_j)D(g_k^{-1})] \\
&= T_r[D(g_k^{-1})D(g_k)D(g_j)] = T_r D(g_j) = X(g_j)
\end{aligned}
$$

由于群元可分成若干共轭类，而群表示中，同类群元特征标相等，可见特征标是个"类函数"，即每个共轭类，对应表示的一个特征标，若群 G 的 g 个元素分为 K 类，则相对任一表示 $D^{(\mu)}$，可用 $X_1^{(\mu)}, X_2^{(\mu)}, \cdots, X_K^{(\mu)}$ 来标定该表示 $D^{(\mu)}(G)$的特征标。

5—2　特征标的第一正交关系

对于有限群，只需研究它的不等价不可约的幺正表示，而根据幺正表示的正交关系式(2.4.26b)，并取 $i=j, l=k$，再对 i 和 l 求和，则可得到不可约幺正表示的特征标正交关系。

$$
\sum_{\alpha=1}^{g} X^{(\mu)}(g_\alpha) X^{(\nu)*}(g_\alpha) = g\delta_{\mu\nu} \qquad (2.5.5a)
$$

如果群 G 的 g 个群元分为 K 类，而 K_i 类群元的个数为 g_i。由于同类元素特征标相等，故(2.5.5a)式又可写为

$$
\sum_{i=1}^{K} \left(\sqrt{\frac{g_i}{g}} X_i^{(\mu)} \right) \left(\sqrt{\frac{g_i}{g}} X_i^{(\nu)*} \right) = \delta_{\mu\nu} \qquad (2.5.5b)
$$

类似于群上函数 $D_{ij}^{(\mu)}(g_\alpha)$的讨论。式(2.5.5b)再次说明，$\left(\sqrt{\frac{g_i}{g}} X_i^{(\mu)} \right)$是个类上函数，给定不可约表示 $D^{(\mu)}$，就有一组类空间的正交归一基函数，而类空间维数为 G 的类数 K，称

$\left\{\sqrt{\frac{g_i}{g}}X_i^{(\mu)}\right\}$为类空间中特征标矢量的 K 个分量。若群 G 共有 N 个不等价不可约表示，因相互正交的特征标矢量的个数不能大于该空间维数，故有

$$N\leqslant K \tag{2.5.6}$$

下面将证明(2.5.6)式等号成立。

5—3 可约表示的约化

假定我们已知群 G 的所有不可约表示的特征标，若 $D(G)$是 G 的一个可约表示，则必等价于这些不可约表示的直和，而利用特征标的正交关系，可求得表示 $D(G)$中所包含某个不可约表示 $D^{(\mu)}(G)$的次数 $a^{(\mu)}$。因为

$$D(g_\alpha)\cong\sum_{\gamma=1}^{N}{}^{\oplus}a^{(\gamma)}D^{(\gamma)}(g_\alpha),\qquad g_\alpha\in G$$

对应的特征标方程为

$$X(g_\alpha)=\sum_{\gamma=1}^{N}a^{(\gamma)}X^{(\gamma)}(g_\alpha),\qquad g_\alpha\in G \tag{2.5.7}$$

将上式两边同乘 $X^{(\mu)*}(g_\alpha)\frac{1}{g}$，并对群元求和，利用正交关系(2.5.5$a$)得

$$a^{(\mu)}=\frac{1}{g}\sum_{g_\alpha\in G}X^{(\mu)*}(g_\alpha)X(g_\alpha)=\frac{1}{g}\sum_{i=1}^{K}g_iX_i^{(\mu)*}X_i \tag{2.5.8}$$

利用式(2.5.8)可将有限群 G 的任何可约表示约化。通常称不可约表示的特征标为原始特征标或单纯特征标，而可约表示的特征标为复合特征标。任何复合特征标可如式(2.5.7)那样表示为单纯特征标的线性组合。

5—4 不可约表示的判据

根据舒尔引理可以判断一个表示是否可约。如果能找到一个

非常数矩阵与表示 $D(G)$ 的全部矩阵对易，则此表示是可约的。然而，这不仅将涉及许多矩阵的运算，且这种非常数矩阵的构成也无规可寻。但是，利用特征标正交关系可找到不可约表示的有效判据。因为 $a^{(\mu)}$ 是整数，由(2.5.7)式得

$$\sum_{\alpha=1}^{g} |X(g_\alpha)|^2 = \sum_{\alpha=1}^{g} \sum_{\mu,\gamma=1}^{N} a^{(\gamma)} \cdot a^{(\mu)} X^{(\gamma)}(g_\alpha) X^{(\mu)*}(g_\alpha)$$

利用正交关系(2.5.5a)式，则上式化为

$$\sum_{\alpha=1}^{g} |X(g_\alpha)|^2 = g \sum_{\mu=1}^{N} (a^{(\mu)})^2 \tag{2.5.9}$$

如果 $D(G)$ 是不可约表示，则 $a^{(\mu)}$ 只有某个为1，其余全为零。因此对于不可约表示，其特征标必须满足判据

$$\sum_{\alpha=1}^{g} |X(g_\alpha)|^2 = \sum_{i=1}^{k} g_i |X_i|^2 = g \tag{2.5.10}$$

§2.6　不可约表示及特征标第二正交关系

6—1　勃恩赛得(Burnside)定理

定理：有限群的各个不等价不可约表示维数之平方和等于该群的阶数。即

$$\sum_{\mu=1}^{N} n_\mu^2 = g \tag{2.6.1}$$

证明：由凯雷定理知，每个 g 阶有限群必同构于置换群 Sg 的一个正则子群，其对应的 g 阶忠实表示称之正则表示。除单位元素外，其它群元与 G 的每个元素相乘都可改变群元的次序，故对于正则表示，则有

$$\begin{aligned} &X(e) = g \\ &X(g_\alpha) = 0, g_\alpha \neq e \end{aligned} \tag{2.6.2}$$

约化正则表示为 G 的各个不可约表示之直和，对应的特征标

由(2.5.7)式得

$$X(e)=g=\sum_{\gamma=1}^{N}a^{(\gamma)}X^{(\gamma)}(e) \tag{2.6.3}$$

由(2.5.8)式得

$$a^{(\gamma)}=\frac{1}{g}\sum_{\alpha=1}^{g}X^{*(\gamma)}(g_\alpha)X(g_\alpha)=\frac{1}{g}X^{(\gamma)}(e)^*X(e)$$
$$=X^{(\gamma)}(e)^* \tag{2.6.4}$$

由于 $X^{(\gamma)}(e)=X^{(\gamma)}(e)^*=n_\gamma$，代入式(2.6.3)得

$$g=\sum_{\gamma=1}^{N}[X^{(\gamma)}(e)]^2=\sum_{\gamma=1}^{N}n_\gamma^2 \tag{2.6.5}$$

故勃氏定理得证。虽然，对于群的一般可约表示，其 $a^{(\gamma)}\neq n_\gamma$。但由于每个 n 阶有限群都与一个 S_n 群的正则子群同构。因此，由正则表示推得的这个结果，对任何有限群都必满足。

每个不可约表示有 n_γ^2 个正交归一的 g 维矢量 $\sqrt{\frac{n_\gamma}{g}}D_{ij}^{(\gamma)}(g_\alpha)$（群空间矢量），而勃氏定理又说明有限群的 N 个不可约表示共有 g 个正交归一的 g 维矢量，可见这 g 个群上函数可做为这个 g 维群空间的一组正交归一完备基矢。

6—2　群表示第二正交关系

线性代数或量子力学告诉我们，若线性空间 L_m 中的 m 个正交归一基矢或基函数构成完备集，则不难推得这 m 个基函数满足封闭性，即由这 m 个基函数的同一分量组成一组新的 m 维基函数也相互正交归一。

设$\{\psi_n(x)\}$是 L_m 空间中的正交归一完备基函数，则该空间的任意函数 $\psi(x)$都可用这组基函数展开。即

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{m}C_n\psi_n(x)$$

利用 $\psi_n(x)$的正交归一性可立即推得

$$\sum_{n=1}^{m}\psi_n^*(x')\psi_n(x)=\delta(x'-x)$$

同理可知，既然 g 个正交归一的 g 维矢量 $\{\sqrt{\frac{n_\gamma}{g}}D_{ij}^{(\gamma)}(g_\alpha)\}$ 构成 g 维群空间的一组完备集，自然任何群上函数都可以此展开，这组基函数也必然满足封闭性。但这里的宗量不再是时空变量 x，而是群元 g_α 或群参数 α。对于有限群，立即得到不可约表示的第二正交关系

$$\sum_{\gamma=1}^{N}\sum_{i,j=1}^{n_\gamma}\left[\sqrt{\frac{n_\gamma}{g}}D_{ij}^{(\gamma)*}(g_\alpha)\right]\left[\sqrt{\frac{n_\gamma}{g}}D_{ij}^{(\gamma)}(g_\beta)\right]=\delta_{\alpha\beta} \qquad (2.6.5)$$

6—3 特征标第二正交关系

设 g_β 为群 G 的任一元素，而 $\{g_\alpha\}$ 是共轭类 K_l 的元素集合。对 G 的某个不可约表示 $D^{(\gamma)}(G)$，作矩阵 $M_l^{(\gamma)}$，

$$M_l^{(\gamma)}=\sum_{g_\alpha\in K_l}D^{(\gamma)}(g_\alpha) \qquad (2.6.6)$$

将上式两边分别左乘 $D^{(\gamma)}(g_\beta)$ 和右乘 $D^{(\gamma)}(g_\beta)^{-1}$，根据群的基本性质得

$$\begin{aligned}
&D^{(\gamma)}(g_\beta)M_l^{(\gamma)}D^{(\gamma)}(g_\beta)^{-1}\\
&=\sum_{g_\alpha\in K_l}D^{(\gamma)}(g_\beta)D^{(\gamma)}(g_\alpha)D^{(\gamma)}(g_\beta^{-1})=\sum_{g_\alpha\in K_l}D^{(\gamma)}(g_\beta g_\alpha g_\beta^{-1})\\
&=\sum_{g_\gamma\in K_l}D^{(\gamma)}(g_\gamma)=M_l^{(\gamma)}
\end{aligned} \qquad (2.6.7)$$

由舒尔引理 I 推断，$M_l^{(\gamma)}$ 是个与不可约表示 $D^{(\gamma)}$ 和类指标 l 有关的 n_γ 维常数矩阵，令

$$M_l^{(\gamma)}=C_l^{(\gamma)}I \qquad (2.6.8)$$

若 K_l 类共有 g_l 个元素，对上式两边求迹则得

$$C_l^{(\gamma)}=\frac{g_l}{n_\gamma}X_l^{(\gamma)} \qquad (2.6.9)$$

代入式(2.6.8)，故有

$$M_l^{(\gamma)}=\frac{g_\gamma}{n_\gamma}X_l^{(\gamma)}I \tag{2.6.10}$$

利用不可约表示第二正交关系(2.6.5)，分别对群元 g_α 和 g_β 所属共轭类 K_l 与 K_m 的元素求和，并将式(2.6.10)代入，不难推得特征标第二正交关系

$$\sum_{\gamma=1}^{N}\left[\sqrt{\frac{g_m}{g}}X_m^{(\gamma)}\right]\left[\sqrt{\frac{g_l}{g}}X_l^{(\gamma)*}\right]=\delta_{lm} \tag{2.6.11}$$

从上式可看出，如果把 N 个不可约表示的第 l 类元素的特征标视为一个 N 维矢量，其 N 个分量为 $\sqrt{\frac{g_l}{g}}X_l^{(1)}$，$\sqrt{\frac{g_l}{g}}X_l^{(2)}$，…，$\sqrt{\frac{g_l}{g}}X_l^{(N)}$。若群 G 有 K 类，故有 K 个这种相互正交归一的 N 维矢量。而正交矢量的数目不可能超过空间维数 N，所以必定是 $K\leqslant N$。但式(2.5.6)限制 $N\leqslant K$，因此，唯一不矛盾的可能性是

$$N=K \tag{2.6.12}$$

这个结果十分重要。因为，当给定一个有限群，自然其全部群元可分为若干共轭类，而此群存在的不等价不可约表示的数目恰好等于其共轭类数。

6—4 不可约表示的确定及特征标表

综合上述，可得到以下六个关系式，它们对求有限群的不可约表示，尤其是求特征标起着重要作用。我们按使用这些关系式的先后次序重新写出。

(1) $N=K$ ；

(2) $\sum_{\gamma=1}^{N}n_\gamma^2=g$ ；

(3) $\sum_{i=1}^{K}\sqrt{\frac{g_i}{g}}X_i^{(\mu)}\sqrt{\frac{g_i}{g}}X_i^{(\gamma)*}=\delta_{\mu\gamma}$ ；

$$(4)\sum_{\gamma=1}^{N}\sqrt{\frac{g_i}{g}}X_i^{(\gamma)}\sqrt{\frac{g_i}{g}}X_j^{(\gamma)*}=\delta_{ij}\ ; \qquad (2.6.13)$$

$$(5)\sum_{g_\alpha\in G}\sqrt{\frac{n_\mu}{g}}D_{lk}^{(\mu)*}(g_\alpha)\sqrt{\frac{n_\gamma}{g}}D_{ij}^{(\gamma)}(g_\alpha)=\delta_{\mu\gamma}\delta_{li}\delta_{kj}\ ;$$

$$(6)\sum_{\gamma=1}^{N}\sum_{i,j=1}^{n_\gamma}\sqrt{\frac{n_\gamma}{g}}D_{ij}^{(\gamma)}(g_\alpha)^*\sqrt{\frac{n_\gamma}{g}}D_{ij}^{(\gamma)}(g_\beta)=\delta_{\alpha\beta}\ 。$$

利用以上关系，原则上可确定有限群的不可约表示。然而，对某些高阶有限群，单纯依据这些关系式来确定表示矩阵是相当困难的。值得庆幸的是在实际应用中，往往并不需要求具体表示矩阵，而只需要确定特征标。我们可将群的所有不等价不可约表示的各类群元特征标列成一个表，称它为特征标表。同行内是同一个不可约表示的各类群元的特征标，而同列内是同类元素的各个不可约的特征标，由于 $N=K$，因此特征标表是个方表（见表 2.1）。利用(2.6.13)式的前四个关系和群的具体结构，对常用的有限群，不难作出其特征标表。

表 2.1　　特征标表

$D^{(\gamma)}$ \ K_i	C_1	C_2	……	C_K
$D^{(1)}$	$X_1^{(1)}$	$X_2^{(1)}$	……	$X_K^{(1)}$
$D^{(2)}$	$X_1^{(2)}$	$X_2^{(2)}$	……	$X_K^{(2)}$
⋮	⋮	⋮	……	⋮
$D^{(N)}$	$X_1^{(N)}$	$X_2^{(N)}$	……	$X_K^{(N)}$

表 2.2a

γ \ i	1	2	3
1	1	α	α^2
2	1	β	β^2
3	1	γ	γ^2

表 2.2b

γ \ i	1	2	3
1	1	1	1
2	1	ε	ε^2
3	1	ε^2	ε

例 1　二阶群$\{e,a,b\}$必是循环群，故有$b=a^2, a^3=e$。它有三个不等价的 1 维表示，其特征标同于表示。设其特征标表如表2.2a所示，由$a^3=e$知$\alpha^3=\beta^3=\gamma^3=1$，因此$\alpha,\beta,\gamma$分别可取$1, e^{2\pi i/3}$和$e^{4\pi i/3}$。令$\epsilon=e^{2\pi i/3}$，则此群的特征标表如表2.2b所示。不难证明，它满足特征标的两个正交关系。一切更高阶循环群都有类似的特征标表。

例 2　置换群S_3是最低阶非阿贝尔群。其 6 个元素可分为 3 类：$C_1=\{e\}, C_2=\{(12),(23),(13)\}, C_3=\{(123),(321)\}$。故群$S_3$有三个不等价不可约表示。由勃氏定理推知，它有两个 1 维表示和一个 2 维表示。根据上面讨论，其特征标形式如表2.3a，根据正交关系可定出常数a,b,c和d，其特征标表如表2.3b所示。每个群都有一个恒等表示，通常放在表中第一行，而第一列是单位元素的特征标，它恰是每个不可约表示的维数，还应指出，上述并非是做群S_3特征标表的最快方法。因为C_1和C_3类元素构成群S_3的一个不变子群，对应的二阶商群为$E=\{C_1,C_3\}, A=\{C_2\}$. 它同构子二阶群，从而可方便求得S_3群的两个 1 维不可约表示，再根据正交关系可求得 2 维表示的特征标。

表 2.3a

γ \ i	1	2	3
1	1	1	1
2	1	a	b
3	2	c	d

表 2.3b

γ \ i	1	2	3
1	1	1	1
2	1	−1	1
3	2	0	−1

§ 2.7　群表示基函数

我们曾讨论过从一套在群作用下不变的线性独立函数出发，可以求得群的相应表示。这些线性独立函数又称之该表示的基函

数，基函数的数目即为表示维数。同时也研究了群表示及相应特征标的一些重要性质。但在许多物理问题中，有限群的表示矩阵或特征标已知，我们也可由此求出该不可约表示的一组基函数。虽然基函数的选择并不唯一，但它对分析许多物理问题仍十分有用，因此在某些有限群的特征标表中常常同时给出相应表示的基函数。我们可以根据表示矩阵写下对称化的基函数，但本节只介绍用投影算符技巧，可从任一个适当函数中把对称化的基函数投影出来。

7—1 投影算符

设函数集$\{\Phi_i^{(\mu)}\}$是变换群$G=\{U(g_a)\}$的不可约表示$D^{(\mu)}$的基函数，$i=1,2,\cdots,n_\mu$。而$D^{(\mu)}(g_a)$为群元g_a相应的不可约表示矩阵，则有

$$U(g_a)\Phi_i^{(\mu)}=\sum_{j=1}^{n_\mu}D_{ji}^{(\mu)}(g_a)\Phi_j^{(\mu)} \tag{2.7.1}$$

将上式两边同乘$D_{j'i'}^{(\gamma)*}(g_a)$，并对群元求和，利用正交关系得

$$\sum_{a=1}^{g}D_{j'i'}^{(\gamma)*}(g_a)U(g_a)\Phi_i^{(\mu)}=\frac{g}{n_\gamma}\Phi_{j'}^{(\mu)}\delta_{\mu\gamma}\delta_{ii'}$$

令

$$O_{j'i'}^{(\gamma)}\equiv\frac{n_\mu}{g}\sum_{a=1}^{g}D_{j'i'}^{(\gamma)*}(g_a)U(g_a) \tag{2.7.2}$$

则上式又可改写为

$$O_{j'i'}^{(\gamma)}\Phi_i^{(\mu)}=\Phi_{j'}^{(\mu)}\delta_{\mu\gamma}\delta_{ii'} \tag{2.7.3}$$

对于$\mu=\gamma$和$i'=i$时，并将j'改为j，则有

$$O_{ji}^{(\mu)}\Phi_i^{(\mu)}=\Phi_j^{(\mu)} \tag{2.7.4}$$

可见算符$O_{ji}^{(\mu)}$作用在不可约表示$D^{(\mu)}$的第i个基函数上，则将其变为同一不可约表示的第j个基函数。这说明，只要晓得表示$D^{(\mu)}$的一个基函数，则通过$O_{ji}^{(\mu)}$作用可得到该不可约表示的基函数的完备集。在$i=j$的特殊情况下，有

$$O_{ii}^{(\mu)}\Phi_i^{(\mu)}=\Phi_i^{(\mu)} \tag{2.7.5}$$

上式的重复指标并不对 i 求和。其中

$$O_{ii}^{(\mu)}=\frac{n_\mu}{g}\sum_{a=1}^{g} D_{ii}^{(\mu)*}(g_a)U(g_a) \tag{2.7.6}$$

因此，若存在某个函数 ψ 满足 $O_{ii}^{(\mu)}\psi=\psi$，则可断定函数 ψ 是不可约表示 $D^{(\mu)}$ 的第 i 个基函数。如果表示是 1 维的，则 $D_{ii}^{(\mu)*}(g_a)\equiv X^{(\mu)}(g_a)$，式(2.7.6)可写成

$$O^{(\mu)}=\frac{1}{g}\sum_{a=1}^{g}X^{(\mu)*}(g_a)U(g_a) \tag{2.7.7}$$

根据基函数的完备性，任意平方可积函数 F 可以此展开

$$F=\sum_{\gamma=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_\gamma}C_j^{(\gamma)}\Phi_j^{(\gamma)}$$

若将算符 $O_{ii}^{(\mu)}$ 对 F 作用得

$$O_{ii}^{(\mu)}F=C_i^{(\mu)}\Phi_i^{(\mu)}=\Phi_i'^{(\mu)} \tag{2.7.8}$$

可见 $O_{ii}^{(\mu)}$ 对任意函数作用只将其中的不可约表示 $D^{(\mu)}$ 的第 i 分量的基函数(可能差常数因子)投射出来，故称做投影算符。

从任一适当函数出发，利用投影算符性质(2.7.8)式和式(2.7.4)，可得到全部不可约表示的基函数。当然，欲求表示 $D^{(\mu)}$ 的基函数，则须首先知道该表示矩阵。如果只晓得某不可约表示的特征标，则可另外定义一个算符 $O^{(\mu)}$

$$\begin{aligned}O^{(\mu)}&\equiv\sum_{i=1}^{n_\mu}O_{ii}^{(\mu)}=\sum_{i=1}^{n_\mu}\sum_{a=1}^{g}\frac{n_\mu}{g}D_{ii}^{*(\mu)}(g_a)U(g_a)\\&=\frac{n_\mu}{g}\sum_{a=1}^{g}X^{(\mu)*}(g_a)U(g_a)\end{aligned} \tag{2.7.9}$$

由方程(2.7.8)和(2.7.9)得

$$O^{(\mu)}F=\sum_{i=1}^{n_\mu}\Phi_i'^{(\mu)}=\Phi^{(\mu)} \tag{2.7.10}$$

$\Phi^{(\mu)}$ 是不可约表示 $D^{(\mu)}$ 的全体基函数之和。但它并非是 $D^{(\mu)}$ 的固有基函数。为了熟识由不可约表示求其基函数的技巧，下面以点群

D_3 为例详细阐明。

7—2 D_3 群二维不可约表示基函数

D_3 群是个正三角形具有的对称性群（详见第三章）。如图 2.2 所示，它是个六阶群。设$\vec{e_1}$和$\vec{e_2}$分别为 x 和 y 方向的单位矢量，绕过 O 点且垂直于$\vec{e_1}$和$\vec{e_2}$所在平面的轴线旋转 120°，240°和 360°的对称操作分别以字母 C_3，C_3^2 和 e 标记，而绕轴 Oa，Ob 和 Oc 旋转 180°

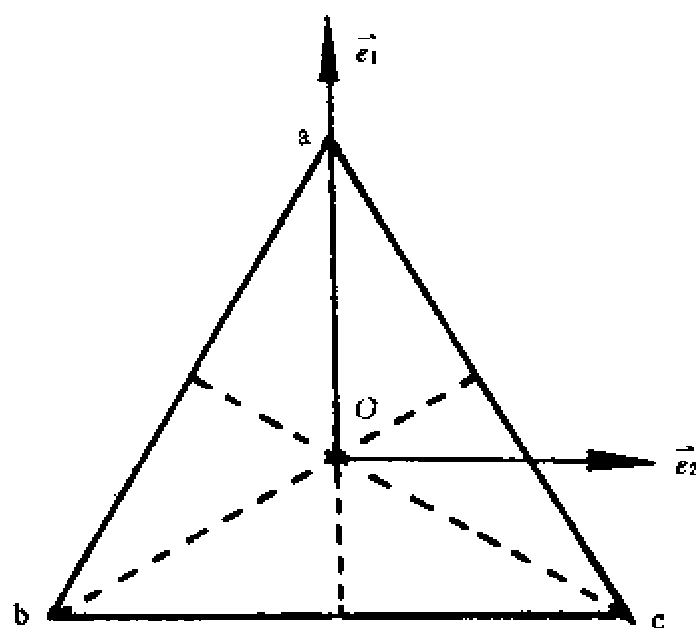


图 2.2 正三角形对称性

表 2.4 D_3 群的不可约表示

$D^{(\mu)}$ \ g_α	e	$C_2^{(a)}$	$C_2^{(b)}$	$C_2^{(c)}$	C_3	C_3^2
$D^{(1)}=A_1$	1	1	1	1	1	1
$D^{(2)}=A_2$	1	−1	−1	−1	1	1
$D^{(3)}=E$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

的对称操作分别以 $C_2^{(a)}$，$C_2^{(b)}$ 和 $C_2^{(c)}$ 标记。表 2.4 列出 D_3 群的两个不等价 1 维表示和一个 2 维表示。我们可任选一函数 $F=ax+by+cx^2+dy^2$，利用(2.1.6)式和表示 $D^{(3)}$，立即可求得该表示的基函数。由于

$$U(e)F=F=ax+by+cx^2+dy^2$$

$$U(C_2^{(a)})F=F(C_2^{(a)-1}\vec{r})=F(C_2^{(a)}\vec{r})=ax-by+cx^2+dy^2$$

$$U(C_2^{(b)})F=F(C_2^{(b)}\vec{r})=a(-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y)+b(-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y)+C(-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y)^2+d(-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y)^2=(-\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}b)x+(-\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{b}{2})y+(\frac{c}{4}+\frac{3d}{4})x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}(c-d)xy+(\frac{d}{4}+\frac{3}{4}c)y^2$$

$$U(C_2^{(c)})F=(-\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}b)x+(\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{b}{2})y+(\frac{c}{4}+\frac{3}{4}d)x^2-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(c-d)xy+(\frac{d}{4}+\frac{3}{4}c)y^2$$

$$U(C_3)F+(-\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}b)x+(-\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{b}{2})y+(\frac{c}{4}+\frac{3}{4}d)x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}(c-d)xy+(\frac{d}{4}+\frac{3}{4}c)y^2$$

$$U(C_3^2)F=(-\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}b)x+(-\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{b}{2})y+(\frac{c}{4}+\frac{3}{4}d)x^2-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(c-d)xy+(\frac{d}{4}+\frac{3}{4}c)y^2$$

由(2.7.6)式可得到群 D_3 的两个 1 维表示 A_1 和 A_2 的投影算符 $O^{(1)}$和 $O^{(2)}$。

$$O^{(1)}=\frac{1}{6}[U(e)+U(C_2^{(a)})+U(C_2^{(b)})+U(C_2^{(c)})+U(C_3)+U(C_3^2)] \tag{2.7.11}$$

则有

$$O^{(1)}F=\frac{c+d}{2}(x^2+y^2) \tag{2.7.12}$$

$$O^{(2)}=\frac{1}{6}[U(e)-U(C_2^{(a)})-U(C_2^{(b)})-U(C_2^{(c)})+U(C_3)+U(C_3^2)] \tag{2.7.13}$$

故有

$$O^{(2)}F=0 \tag{2.7.14}$$

这说明，由函数 F 虽可求得 D_3 群的恒等表示基函数为 (x^2+y^2)，但还得不到表示 A_2 的基函数，即 F 对求 A_2 表示的基函数是不适当的。对其 2 维表示 $D^{(3)}$，因 $X^{(3)}(e)=2,X^{(3)}(C_2^{(a)})=X^{(3)}(C_2^{(b)})=X^{(3)}(C_2^{(c)})=0,X^{(3)}(C_3)=X^{(3)}(C_3^2)=-1$，由(2.7.10)得

$$O^{(3)}=\frac{2}{6}[2U(e)-U(C_3)-U(C_3^2)]$$

$$O^{(3)}F=\frac{1}{2}[ax+by+\frac{1}{2}(c-d)(x^2+y^2)]\equiv\psi$$

ψ 是 2 维不可约表示的两基函数之和，为求该表示的两个基函数，可利用投影算符式(2.7.8)的性质。由于

$$O_{11}^{(3)}=\frac{1}{3}[U(e)+U(c_2^{(a)})-\frac{1}{2}U(c_2^{(b)})-\frac{1}{2}U(c_2^{(c)})-\frac{1}{2}U(c_3)-\frac{1}{2}U(c_3^2)],$$

$$O_{11}^{(3)}F=ax+\frac{c-d}{2}(x^2-y^2)=\Phi_1^{(3)}$$

再利用式(2.7.3)和(2.7.4)，得

$$O_{21}^{(3)}\Phi_1^{(3)}=ay-(c-d)xy=\Phi_2^{(3)} \tag{2.7.15}$$

则 $\Phi_1^{(3)}$ 和 $\Phi_2^{(3)}$ 是两个 $D^{(3)}$ 表示的基函数。同理利用投影算符 $O_{22}^{(3)}$ 作用于 F 上，又可得到一个基函数 $\psi_2^{(3)}$，其中

$$\begin{aligned} O_{22}^{(3)}F&=by=\psi_2^{(3)} \\ O_{12}^{(3)}\psi_2^{(3)}&=bx=\psi_1^{(3)} \end{aligned} \tag{2.7.16}$$

由于系数 a,b,c 和 d 可任意选取，为简单起见，可令 $b=1$，故推得

D_3 群的一组 2 维表示的基函数为 x 和 y。而由 $\Phi_1^{(3)}$ 和 $\Phi_2^{(3)}$，若取 $c-d=0$ 和 $a=1$，其结果与前者同；若取 $c-d=2$ 和 $a=o$，则可得到另一组基函数为(x^2-y^2)和$-2xy$。

7—3 直积表示和直积群表示的基函数

若群 G 有两个不可约表示 $D^{(\mu)}$ 和 $D^{(\gamma)}$，令$\{\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_{n_\mu}\}$是表示 $D^{(\mu)}$的基函数，而$\{\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{n_\gamma}\}$是 $D^{(\gamma)}$的基函数，则直积表示 $D=D^{(\mu)}\otimes D^{(\gamma)}$是个 $n_\mu n_\gamma$ 维表示，其基函数可写为 $\psi_{mn}=\Phi_m\psi_n$($1\leqslant m\leqslant n_\mu$，$1\leqslant n\leqslant n_\gamma$)。对于任一变换群元 $U(g_a)$，则有

$$U(g_a)\psi_{mn}=\sum_{k=1}^{n_\mu}\sum_{l=1}^{n_\gamma}\psi_{kl}[D^{(\mu)}(g_a)\otimes D^{(\gamma)}(g_a)]_{kl,mn}$$
$$=\sum_{k=1}^{n_\mu}\sum_{l=1}^{n_\gamma}\Phi_k\psi_l D_{km}^{(\mu)}(g_a)D_{ln}^{(\gamma)}(g_a)=(U(g_a)\Phi_m)(U(g_a)\psi_n) \tag{2.7.17}$$

这表明算符对直积空间函数的作用规律。由基函数$\{\psi_{mn}\}$张成的 $n_\mu\cdot n_\gamma$ 维空间是分别由基函数$\{\Phi_m\}$和$\{\psi_n\}$张成的空间的直积。

物理上还常考虑表示空间自身的直积。设 L_n 是基函数$\{\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_n\}$张成的空间，这时 n^2 维的直积空间 $L_n\otimes L_n$ 的基函数为$\{\Phi_1\Phi_1,\Phi_1\Phi_2,\cdots,\Phi_i\Phi_j,\cdots,\Phi_n\Phi_n\}$。这时必须记住直积函数 $\Phi_i\Phi_j$ 与 $\Phi_j\Phi_i(i\neq j)$不同，它们代表直积空间两个独立的基矢。当所研究的物理系统包含多个全同粒子时，就会出现同一个群的两个表示的直积的情况。例如，在氦这样的双电子原子中，若每个电子的波函数按群 G 的不可约表示变换，则两个电子体系的波函数(忽略电子间相互作用)将按此群的直积表示变换。

设 $H=\{e=h_1,h_2,\cdots,h_n\}$和 $K=\{e=k_1,k_2,\cdots,k_m\}$分别是阶数为 n 和 m 的两个群，H 与 K 的群元可对易，则其直积群 $G=H\otimes K$ 是个 $n\cdot m$ 阶群。而 G 的可约或不可约表示 $D^{(G)}$的基函数，可以取为 H 和 K 的相应表示 $D^{(H)}$和 $D^{(K)}$的基函数的乘积，而 $D^{(G)}$

$=D^{(H)}\otimes D^{(K)}$。令$\{\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_a\}$代表$D^{(H)}$的$a$个基函数，$\{\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_b\}$代表$D^{(K)}$的$b$个基函数，于是表示$D^{(G)}=D^{(H)}\otimes D^{(K)}$有$ab$个基函数$\{\psi_{mn}\}$，这里$\psi_{mn}=\Phi_m\Phi_n$，$1\leqslant m\leqslant a$，$1\leqslant n\leqslant b$。若$G$的群元$g_{\alpha\beta}=h_\alpha k_\beta$，则它对函数$\psi_{mn}$的作用由下式给出：

$$
\begin{aligned}
U(g_{\alpha\beta})\psi_{mn} &= \sum_{k,l=1}^{a,b}\psi_{kl}D^{(G)}_{kl,mn}(g_{\alpha\beta}) \\
&= \Big[\sum_{k=1}^{a}\Phi_k D^{(H)}_{km}(h_\alpha)\Big]\Big[\sum_{l=1}^{b}\psi_l D^{(K)}_{ln}(k_\beta)\Big] \\
&= (H_\alpha\Phi_m)(K_\beta\psi_n) \qquad (2.7.18)
\end{aligned}
$$

可见，两个因子群的算符只作用于它们各自的表示空间。如果有两个可区分的粒子（如电子和质子，它们的波函数按两个不同的对称性群的表示变换，则整个体系的波函数将按直积群的表示变换。

7—4 克莱布西—高登(Clebsch—Gordan)系数

设$D^{(\mu)}$和$D^{(\gamma)}$是群G的两个不可约表示，其直积表示通常是可约的，可等价于一系列不可约表示的直和。

$$
D^{(\mu)}\otimes D^{(\gamma)}=\sum_{\lambda}^{\oplus}a_\lambda D^{(\lambda)} \qquad (2.7.19)
$$

称上式为克莱布西—高登级数。a_λ是在该直积表示中包含不可约表示$D^{(\lambda)}$的次数。对于幺正表示，则有

$$
a_\lambda=\frac{1}{g}\sum_{g_\alpha\in G}\chi^{(\mu)}(g_\alpha)\chi^{(\gamma)}(g_\alpha)\chi^{(\lambda)*}(g_\alpha) \qquad (2.7.20)
$$

有时常将(2.7.19)式改写为

$$
D^{(\mu)}\otimes D^{(\gamma)}=\sum_{\lambda}^{\oplus}(\mu\gamma\lambda)D^{(\lambda)} \qquad (2.7.21)
$$

显然有$(\mu\gamma\lambda)=(\gamma\mu\lambda)$。

在物理应用方面，更重要的问题是求直积表示的基函数，通过将其适当组合而写成按群不可约表示变换的形式。如果给定了一对不可约表示$D^{(\mu)}$和$D^{(\gamma)}$的基函数$\{\psi_j^{(\mu)}\}(j=1,2,\cdots,n_\mu)$与$\{\Phi_l^{(\gamma)}\}(l=1,2,\cdots,n_\gamma)$，我们要求其乘积$\psi_j^{(\mu)}\Phi_l^{(\gamma)}$的线性组合的$n_\lambda$个基函

数 $\Psi_s^{(\lambda)}(s=1,2,\cdots,n_\lambda)$，它们属于不可约表示 $D^{(\lambda)}$。显然 $D^{(\lambda)}$必包含在 $D^{(\mu)}\otimes D^{(\gamma)}$中，即$(\mu\gamma\lambda)\neq 0$。如果$(\mu\gamma\lambda)>1$，则有几组无关的$\{\Psi_s^{(\lambda)}\}$，它们都属于 $D^{(\lambda)}$，为了区别哪一组$\{\Psi_s^{(\lambda)}\}$，我们可利用新的标记 $\Psi_s^{(\lambda\tau_\lambda)}$，$s=1,2,\cdots,n_\lambda$，$\tau_\lambda=1,2,\cdots,(\mu\gamma\lambda)$。函数 $\Psi_s^{(\lambda\tau_\lambda)}$ 是 $\psi_j^{(\mu)}\Phi_l^{(\gamma)}$ 的线性组合：

$$\Psi_s^{(\lambda\tau_\lambda)}=\sum_{jl}\psi_j^{(\mu)}\Phi_l^{(\gamma)}(\mu j,\gamma l|\lambda\tau_\lambda s) \tag{2.7.22}$$

上式中的组合系数$(\mu j,\gamma l|\lambda\tau_\lambda s)$称之克莱布西—高登系数或魏格纳(Wigner)系数，也有人叫做矢量相加系数。对于不同的对称性群，它有不同的属名和具体数值表。

$\Psi_s^{(\lambda\tau_\lambda)}$ 的总数必须等于乘积函数 $\psi_j^{(\mu)}\Phi_l^{(\gamma)}$ 的总数：

$$\sum_\lambda(\mu\gamma\lambda)n_\lambda=n_\mu n_\gamma \tag{2.7.23}$$

因此，C—G 系数$(\lambda j,\gamma l|\lambda\tau_\lambda s)$形成一个 $n_\mu n_\gamma$ 阶矩阵。方程(2.7.22)给出直积表示空间中两种不同的基矢或基函数 $\Psi_s^{(\lambda\tau_\lambda)}$ 和 $\psi_j^{(\mu)}\Phi_l^{(\gamma)}$ 之间的线性关系，这种关系还可以反过来写为

$$\psi_j^{(\mu)}\Phi_l^{(\gamma)}=\sum_{\lambda\tau_\lambda s}\Psi_s^{(\lambda\tau_\lambda)}(\lambda\tau_\lambda s|\mu j,\gamma l),\quad \begin{matrix} j=1,2,\cdots,n_\mu \\ l=1,2,\cdots,n_\gamma \end{matrix} \tag{2.7.24}$$

因此有

$$\sum_{j,l}(\lambda'\tau'_{\lambda}s'|\mu j,\gamma l)(\mu j,\gamma l|\lambda\tau_\lambda s)=\delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\tau_\lambda\tau'_\lambda}\delta_{ss'} \tag{2.7.25a}$$

$$\sum_{\lambda\tau_\lambda}(\mu j',\gamma l'|\lambda\tau_\lambda s)(\lambda\tau_\lambda s|\mu j,\gamma l)=\delta_{jj'}\delta_{ll'} \tag{2.7.25b}$$

对于幺正表示，方程(2.7.22)是从正交基$\{\psi_j^{(\mu)}\Phi_l^{(\gamma)}\}$变到另一组正交基$\{\Psi_s^{(\lambda\tau_\lambda)}\}$，$C$—$G$ 系数是幺正的，满足

$$(\lambda\tau_\lambda s|\mu j,\gamma l)=(\mu j,\gamma l|\lambda\tau_\lambda s)^* \tag{2.7.26a}$$

$$\sum_{j,l}(\mu j,\gamma l|\lambda'\tau'_{\lambda'}s')^*(\mu j,\gamma l|\lambda\tau_\lambda s)=\delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\tau_\lambda\tau'_{\lambda'}}\delta_{ss'} \tag{2.7.26b}$$

$$\sum_{\lambda\tau_\lambda}(\mu j',\gamma l'|\lambda\tau_\lambda s)(\mu j,\gamma l|\lambda\tau_\lambda s)^*=\delta_{jj'}\delta_{ll'} \tag{2.7.26c}$$

由于$\{\Psi_s^{(\lambda\tau_\lambda)}\}$是群 G 的 $D^{(\lambda)}$ 不可约表示的基函数，则群算符

$U(g_a)(g_a\in G)$对其作用为

$$U(g_a)\Psi_t^{(\lambda\tau_\lambda)}=\sum_{s'}D_{s's}^{(\lambda)}(g_a)\Psi_{s'}^{(\lambda\tau_\lambda)}$$
$$=\sum_{s'ik}\psi_i^{(\mu)}\Phi_k^{(\gamma)}(\mu i,\gamma k|\lambda\tau_\lambda s')D_{s's}^{(\lambda)}(g_a)$$

(2.7.27a)

$$U(g_a)\Psi_s^{(\lambda\tau_\lambda)}=U(g_a)\sum_{jl}[\psi_j^{(\mu)}\Phi_l^{(\gamma)}](\mu j,\gamma l|\lambda\tau_\lambda s)$$
$$=\sum_{ikjl}\psi_i^{(\mu)}\Phi_k^{(\gamma)}D_{ij}^{(\mu)}(g_a)D_{kl}^{(\gamma)}(g_a)(\mu j,\gamma l|\lambda\tau_\lambda s)$$

(2.7.27b)

由于$\{\psi_i^{(\mu)}\Phi_k^{(\gamma)}\}$是一套线性独立的基函数，故有

$$\sum_{jl}D_{ij}^{(\mu)}(g_a)D_{kl}^{(\gamma)}(g_a)(\mu j,\gamma l|\lambda\tau_\lambda s)$$
$$=\sum_{s'}(\mu j,\gamma k|\lambda\tau_\lambda s')D_{s's}^{(\lambda)}(g_a)\qquad(2.7.28)$$

利用C—G系数性质(2.7.26)，可将上式写成物理上更有用的形式

$$\sum_{ikjl}(\lambda'\tau'_{\lambda'}t|\mu j,\gamma k)D_{ij}^{(\mu)}(g_a)D_{kl}^{(\gamma)}(g_a)(\mu j,\gamma l|\lambda\tau_\lambda s)$$
$$=\sum_{s'}D_{s's}^{(\lambda)}(g_a)\delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\tau_\lambda\tau'_{\lambda'}}\delta_{ts'}$$

上式左边第一个因子又可写为$(\mu i,\gamma k|\lambda'\tau'_{\lambda'}t)^*$，并将$C$—$G$系数移到方程右边，则得

$$D_{ij}^{(\mu)}(g_a)D_{kl}^{(\gamma)}(g_a)=\sum_{s's}\sum_{\lambda\tau_\lambda}(\mu i,\gamma k|\lambda\tau_\lambda s')D_{s's}^{(\lambda)}(\lambda\tau_\lambda s|\mu j,\gamma l)$$

(2.7.29)

以上这些关系对讨论量子论中的选择定则，能谱分裂以及粒子组态的分类等都要用到，而物理系统满足的对称性群各不相同，对应的C—G系数也不同，为了计算方便，不少书中已给出C—G系数表供您使用。

习 题 二

2—1 若 D 是群的表示，试证其复数共轭 $D^*=\{D^*(g_a)\}$ 也是该群的表示。D 和 D^* 或者都可约或者都不可约。

2—2 若 $D^{(\mu)}$ 和 $D^{(\gamma)}$ 是群 G 的两个不等价不可约表示，试证其直积表示 $D^{(\mu)}\otimes D^{(\gamma)*}$ 不含恒等表示。且不可约表示与自身的复共轭表示的直积只包含一次恒等表示。

2—3 试证有限群 G 的两个表示 $D(G)$ 和 $D'(G)$ 不包含公共不可约表示的充要条件是特征标正交，即

$$\sum_{i=1}^{K} g_i X_i^{(D)} X_i^{(D')*}=0$$

式中 $X_i^{(D)}$ 和 $X_i^{(D')}$ 分别是表示 D 和 D' 的第 i 类群元的特征标。

2—4 设 $A=\{A_\alpha\}$ 和 $B=\{B_\beta\}$ 分别是群 $G=\{g_\alpha\}$ 和 $F=\{f_\beta\}$ 的不可约表示，试证 $C=\{C_{\alpha\beta}\}$ 是直积群 $H=G\otimes F$ 的不可约表示，其中 $C_{\alpha\beta}=A_\alpha\otimes B_\beta$。

2—5 求下列群的特征标表和不可约表示：(1)三阶群；(2)四阶循环群；(3)四阶非循环群；(4)六阶非阿贝尔群；(5)n 阶循环群。

2—6 证明每个有限群至少有一个忠实表示，试做出 m 阶循环群的正则表示。

2—7 置换群 S_4 有几类元素？试根据已知的 S_3 群的特征标表作出 S_4 群的特征标表。

2—8 试证直积表示的特征标等于其因子表示的特征标之乘积。

2—9 设群 G 包含下列 8 个元素：$\{1,-1,x,-x,y,-y,z,-z\}$，其乘法表为 $x^2=y^2=z^2=1$，$xy=-yx=z$，$xz=-zx=y$，$zy=-yz=x$。试做出此群的特征标表。

2—10 满足条件

$$\sum_{i=1}^{K} g_i |X_i|^2 = 2g, 3g \text{ 或 } 4g$$

的表示都可能是怎么样的表示(指分解成不可约表示的情况)。

2—11 对于幺正不可约表示 $D^{(\mu)}$,$D^{(\nu)}$和 $D^{(\lambda)}$。证明直积表示 $D^{(\mu)}\otimes D^{(\nu)}$,$D^{(\nu)}\otimes D^{(\lambda)}$和 $D^{(\lambda)}\otimes D^{(\mu)}$中分别包含不可约表示 $D^{(\lambda)*}$,$D^{(\mu)*}$和 $D^{(\nu)*}$的次数相等。

2—12 求直积表示 $D^{(\mu)}\otimes D^{(\nu)}$为不可约表示的条件。

2—13 试证有限群的两个表示 D_1 和 D_2 不包含公共不可约表示的充要条件是其特征标正交:

$$\sum_{i=1}^{K} g_i X_{1i} X_{2i}^{*} = 0$$

式中 X_{1i}和 X_{2i}分别是 D_1 和 D_2 中第 i 类的特征标。

2—14 若不可约表示 $D^{(\mu)}$和 $D^{(\nu)}$的特征标是实数,而 $D^{(\lambda)}$的特征标是复数,试证明直积表示 $D^{(\mu)}\otimes D^{(\lambda)}$必包含相同次数的 $D^{(\lambda)}$和 $D^{*(\lambda)}$。

2—15 利用关系式(2.7.22)和(2.7.24),并根据基函数的线性无关,推导关系式(2.7.25)。

2—16 试证 K_i 类的每个元素的逆元素之集合构成 K_i'类,且对于不可约表示 $D^{(\mu)}$和 $D^{(\nu)}$满足

$$\sum_{i} g_i X_i^{(\mu)} X_{i'}^{(\nu)} = g\delta_{\mu\nu}$$

第三章　分子和晶体对称群

分子是由原子构成的。图 3．1 所示的苯分子（C_6H_6）和甲烷分子（CH_4）等都具有一定的对称性。苯分子的 6 个碳原子排列成平面正六边形，绕过分子中心并垂直此平面的轴转 $2\pi/6$ 角或其整数倍时，苯分子外形不变，而甲烷分子绕每个 C—H 键转 $2\pi/3$ 角也是不变的。这种保持分子或晶体的任意两点间距离不变，并使之变换前后图形相重合的操作称之对称操作。

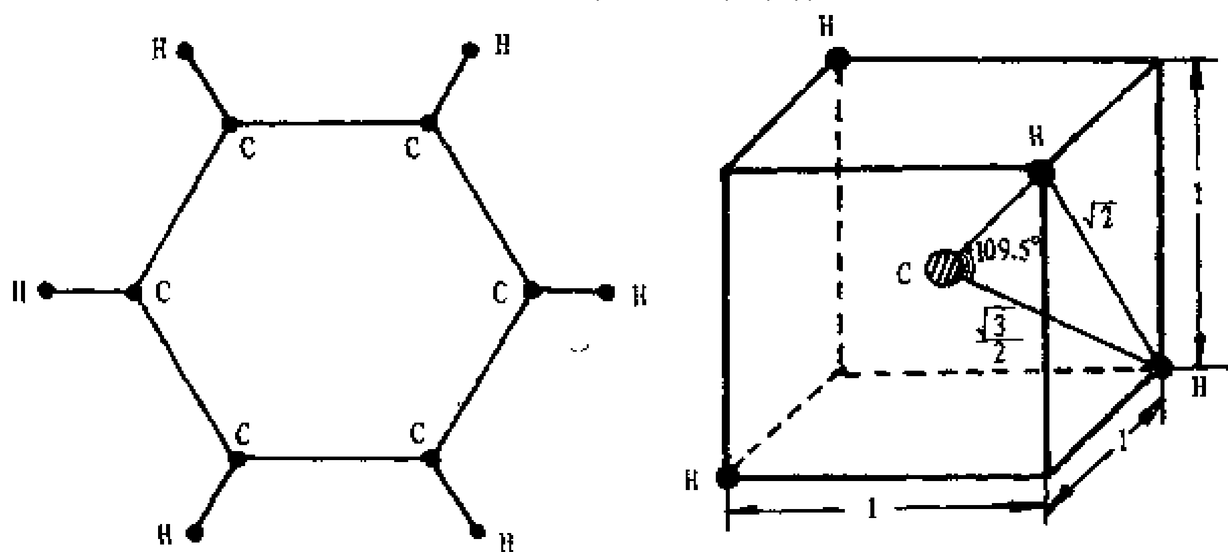


图 3．1　苯和甲烷

分子的对称操作有以下五种：(1) 恒等操作。通常以 E 代表，其实它不对分子作任何变动，仅是以群来描述对称性时数学上所必须的单位群元。(2) 绕轴作定角转动。(3) 镜面反射。(4) 镜转动。先绕轴转一定角后，再做垂直于该轴的平面反射。(5) 中心反演。

虽然许多大分子表观上不存在任何对称操作，但其内部某原子附近却存在局部对称性。当需要研究该原子的某些波谱特性时，

了解其局部对称性也是重要的。以上的对称操作至少都要保持分子内的一点（中心）位置不动，因此称它们所构成的群为分子点群。不同对称性分子将对应不同点群，它们都是三维正交群的有限子群。分子轨道理论及其电子谱和振动谱等都与分子的点群对称性密切相关。

理想晶体是由原子或离子的周期性规则排列。图 3. 2 所示的 NaCl 和 CsCl 晶体分别具有面心立方和体心立方对称性。一般晶体的单位晶胞尺度大约是埃的量级（$1\text{Å}=10^{-8}$cm），而单晶的边长至少有几个毫米，其晶胞密度约为 $10^{21}/\text{cm}^3$。这说明实际晶体虽然大小有限，但在只需考虑晶体内部性质而可乎略其表面效应时，仍可方便地将它视为无限大。这种无限大晶体除了点群对称操作外，还具有某种平移对称性，一切允许的平移变换构成晶体平移群。晶体的这种平移不变性严格限制了晶体可能存在的点群对称性，我们将详细地推演可能存在的 32 个晶体点群，它们在固体物理中得到广泛应用。

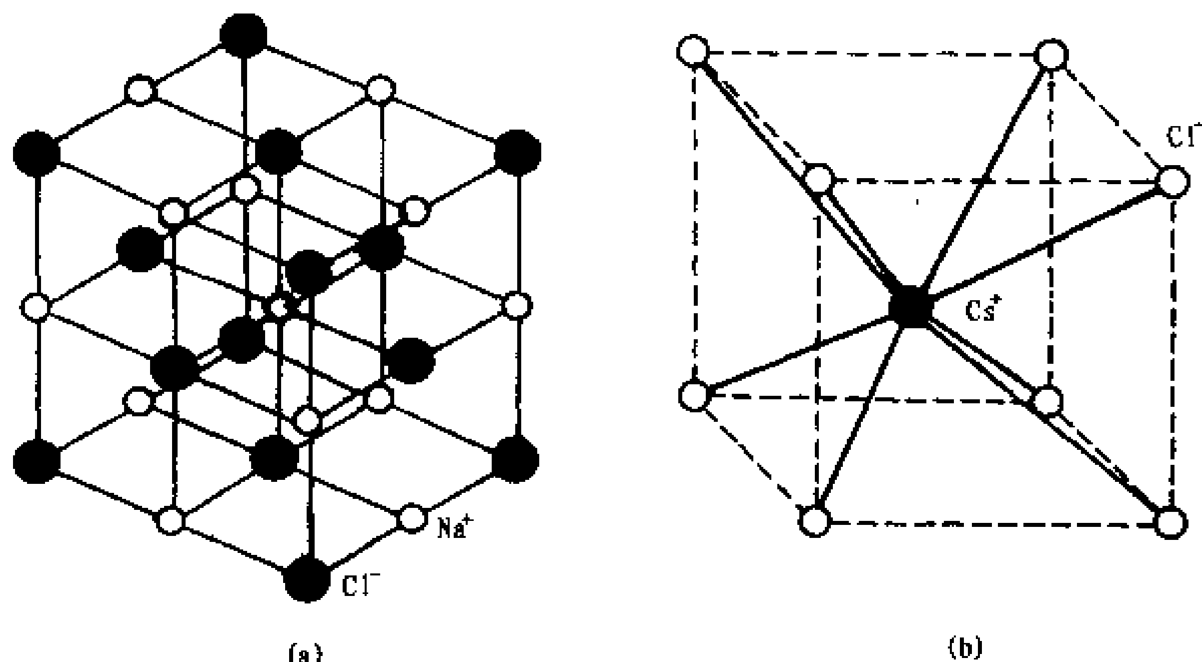


图 3.2　(a) NaCl 晶体的面心立方结构
(b) CsCl 晶体的体心立方结构

通常称绕轴旋转的对称操作为真转动，而单纯由真转动构成的群为第一类点群；绕定轴转动后又作平面反射或中心反演的为非真转动，包含反射与反演的点群是第二类点群。晶体点群和平移群的组合将构成晶体空间群。

§3.1 点群的对称操作

点群的每个群元代表一种对称操作，目前有多种标记点群操作的符号，我们采用广泛使用的熊夫里（Schoenflies）记号。

n 次轴和 n 次双向轴。设绕某轴转 θ 角是点群的一个元素 $R(\theta)$，对于有限群，要求$[R(\theta)]^n=R(n\theta)=E=R(2\pi m)$，其中 m 和 n 为整数，转角 $\theta=2\pi m/n$。绕此轴的最小转角为 $2\pi/n$，则称它为 n 次轴，对应的群元记为 C_n。显然，若 C_n 是点群的一个对称操作，自然 C_n^2，$C_n^3\cdots$，C_n^{n-1} 等也是群元。若 C_n 和 C_n^{n-1} 互为共轭元素，则称该轴为 n 次双向轴。不难看出，n 次轴为双向轴的条件是该点群包含垂直于 n 次轴的 2 次轴，或者有通过此轴的反射面。通常称 n 最大的轴为主轴，并取其为竖直方向。

水平反射面和竖直反射面。与主轴垂直的平面称水平反射面，以 σ_h 标记；面通过主轴的平面为竖直反射面，以 σ_V 标记，过主轴并介于两个水平 2 次轴之间的反射面以 σ_d 代表。

镜转动轴。它是经过 n 次轴转动后再作垂直该轴的平面反射的联合对称操作，以 S_n 标记。

n 次反演轴。当点群包含绕 n 次轴的旋转反演联合操作，则称它为 n 次反演轴，以$\overline{C_n}=IC_n$ 标记。这时点群有以下对称操作：

$\overline{C_n}$，$\overline{C_n}^2$，$\cdots$，$\overline{C_n}^{n-1}$，$\overline{C_n}^n=E$　　（n 为偶数）

$\overline{C_n}$，$\overline{C_n}^2$，$\cdots$，$\overline{C_n}^{2n-1}$，$\overline{C_n}^{2n}=E$　　（n 为奇数）

通常以 I 代表中心反演。若群包含 1 次反演轴，则此群就有对称中心；当群有 2 次反演轴时，此群就有个垂直 C_2 轴的反射面。

等价轴。若群有 C_n 和 C'_n 两个 n 次轴，且 C_n 与 C'_n 或 C'^{-1}_n 共轭，则称这两个 n 次轴等价。不难看出，其等价条件是群包含一个对称操作能将 C_n 轴变为 C'_n 轴。

n 次轴和 n 次镜转动轴可用图 3.3 形象地标记。

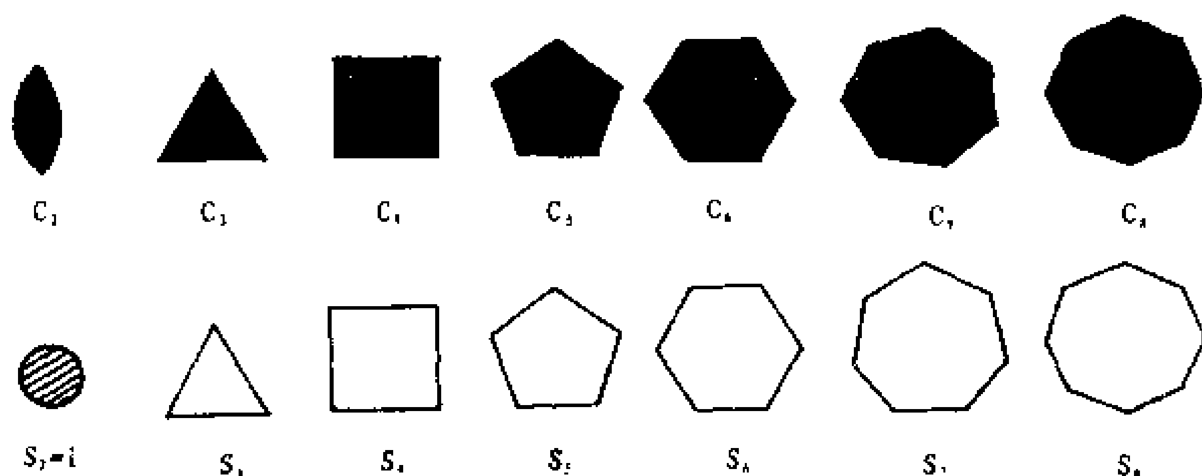


图 3.3　对称操作符号

由上述的对称操作可以构成各种比较简单的基本点群。若再加上其它对称操作，则可构成更大的较复杂点群。由最基本的几何对称性可看出，扩大点群有以下规则：

1°　加上反演操作 I。扩大后的点群比原点群阶数高一倍，而且 I 与其它对称操作皆对易。

2°　若加上一个垂直于 C_n 轴的 2 次水平轴，就相当于有 n 个水平 2 次轴。

3°　若加一个过 C_n 轴反射面 σ_v，就相当于加了 n 个竖直反射面。

为了分析点群的结构，注意到以下两种对称操作的可交换性是有益的：（1）反演与其它点群操作；（2）绕同轴的两个转动；（3）绕两个垂直轴转 π 角；（4）转动与垂直于此轴的平面反射；（5）定轴转 π 角与含此轴的平面反射；（6）两个相垂直的平面反射。

§3.2 极射赤面投影

点群的一切对称操作至少保持空间一点不动，因此其全部转轴和反射平面都要过这个不动点。通常取它为原点。为了形象地在平面上描述点群的对称操作，我们可做以原点为中心，半径任意的圆球，要研究分子或晶体某一点在群元作用下的对称变换，可将该点与球心连结一直线，则直线或其延长线必相交球面一点 A，圆球的赤道平面是个圆面，称它为工作面。当点 A 在上半球时，可将 A 与圆球的南极点连成直线，该直线必相交工作面于 E 点，称它为参考点，以＋号标记；当 A 点在下半球面时，将其与北极点连成直线，它也必交工作面于一点，以○号标记。当对晶体或分子作对称操作时，就相当 A 点在球面变动，而 A 点与北极或南极连结就相当于参考点在赤道平面上变动。这样，点群的每个群元都在工作面上有一个＋或○的像与其对应。通常取工作面为垂直于主轴的水平面，其 n 次轴或 n 次镜像轴要在工作面上的相应位置以图 3.3 形式标记出来。包含水平反射面的点群，其工作面圆用实线，否则为虚线。其它反射面以实线标记，面其它转动和结构线皆以虚线标出，称这种图型为点群的极射赤面投影。这种描述方式，在分析点群结构，尤其是较简单的点群特别方便。下面讨论晶体的 32 个点群时，将一一给出它们的极射赤面投影。

§3.3 晶体 32 种点群

3—1 晶体转轴制约定理

对于单个分子对称性，其转轴的次数是没有限制的。n 可为任何整数，甚至可为无穷大的连续转动。然而对晶体而言，其原子周

期性排列在各个晶格上。为了描述方便，可以晶体的基本平移矢量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ 和 $\vec{a}_3$ 为基矢的坐标系，则晶体中的每个原子的位置矢量为

$$\vec{n}=n_1\vec{a}_1+n_2\vec{a}_3+n_3\vec{a}_3 \tag{3.3.1}$$

这里 n_i 为整数，而 $\vec{a}_i$ 是从一个格点到最邻近格点的最小平移，它们取决于晶体自身的结构。当晶体绕某轴转动 R 时，要满足不变性，必须使格点 $\vec{n}$ 落到另一个格点 $\vec{m}$ 上，从而对转角有很强地制约。因为

$$R\vec{n}=\vec{m}=\sum_{i=1}^{3} m_i\vec{a}_i \tag{3.3.2}$$

上式的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \tag{3.3.3}$$

若取格点矢量 $\vec{n}$ 为 $n_1=1$，$n_2=n_3=0$，则 $m_k=R_{k1}$，由 m_k 为整数可推知 R_{k1} 是整数。类似地推断 R_{k2} 和 R_{k3} 都是整数。故对于晶体旋转对称操作下，其变换矩阵的阵迹 $T_rR=$ 整数。我们知道，相似变换下阵迹不变。若由 $\vec{a}_i$ 为基矢的坐标系变换为直角坐标系，并取 C_n 轴沿 Z 轴，其转角为 φ，则相应的变换矩阵 $\tilde{R}$ 为

$$\tilde{R}=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.3.4}$$

由 $T_rR=T_r\tilde{R}=2\cos\varphi+1=$ 整数不难看出，转角 φ 只能是 0°，60°，90°，120°和 180°，它们分别对应 C_1，C_6，C_4，C_3 和 C_2 轴。对于镜转动，其对应的变换矩阵的 $T_r\tilde{R}=2\cos\varphi-1$，同样可推断镜转轴只有 S_1，S_6，S_4，S_3 和 S_2。对晶体而言，不存在五次轴和六次以

上的高次轴。

3—2　点群 C_n

这是一类 n 阶循环群，每个元素自成一类。对于晶体而言，只有 C_1，C_2，C_3，C_4 和 C_6 五种晶体点群，其极射赤面投影如图3．4所示。它的 n 个群元为 C_n，C_n^2，C_n^3，…，$C_n^n=E$

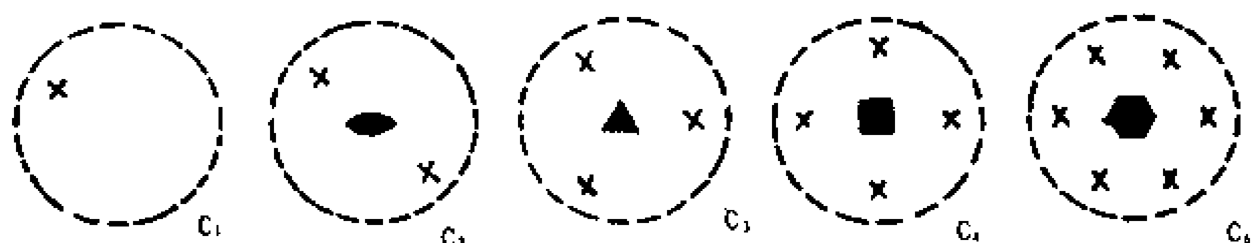


图 3.4　点群 C_n 的极射赤面投影

3—3　点群 C_{nh}

若将水平反射面 σ_h 添加到点群 C_n 上，就可得到点群 C_{nh}。由于 $\sigma_h C_n = C_n \sigma_h$，故 $C_{nh}=C_n \otimes C_s$，其中 $C_s=C_{1h}=\{E,\sigma_h\}$，$C_{nh}$是一个 $2n$ 阶的阿贝尔群，其每个群元自成一类。由于晶体旋转的制约性，只有 $C_{1h}=C_s$，C_{2h}，C_{3h}，C_{4h}和 C_{6h}五种晶体点群，其极射赤面投影如图 3.5 所示。当 n 为偶数时，$I\in C_{nh}$，晶体有一个对称中心。

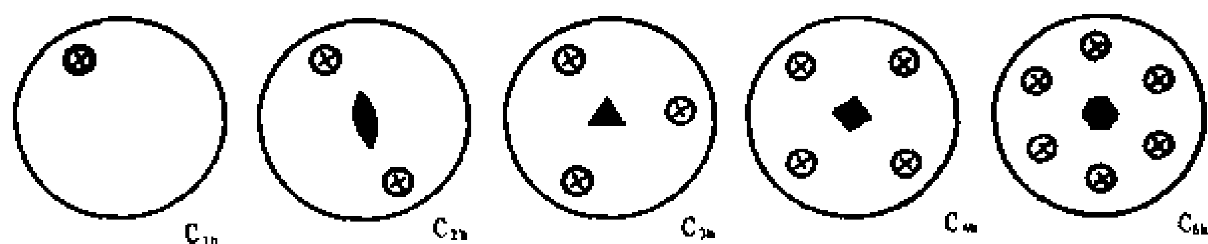


图 3．5　点群 C_{nh}的极射赤面投影

3—4 点群 C_{nv}

若添加一个过 C_n 轴的反射面 σ_v 到点群 C_n 上，经 C_n 对称性，则可得到另外 $n-1$ 个竖直反射面。因此，点群 C_{nv} 有 $2n$ 个群元，除去 n 个 C_n 元素外，还有 n 个平面反射操作。通常 $C_n\sigma_v\neq\sigma_v C_n$，故点群 C_{nv} 不能分解为更简单的两点群直积。由于该点群的 C_n 轴是双向轴，故群元 C_n^m 和 C_n^{n-m} 为同类元素。当 n 为奇数时，其 n 个反射面为一个共轭类，故 C_{nv} 的 $2n$ 个群元可分为 $\frac{n+3}{2}$ 个共轭类；而当 n 为偶数时，其 n 个反射面分属两个共轭类，故有 $\frac{n+6}{2}$ 个共轭类。对于点群 C_1，无法区分反射面 σ_h 和 σ_v，故只有 C_{2v}，C_{3v}，C_{4v} 和 C_{6v} 四种不同于前面的晶体点群，其极射赤面投影如图 3.6 所示。

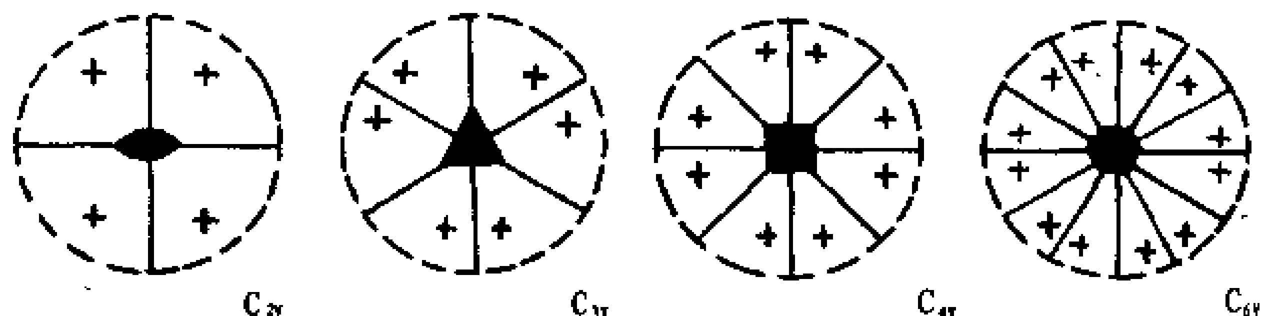


图 3.6 点群 C_{nv} 的极射赤面投影

3—5 点群 S_n

点群 S_n 的每个群元都是镜转动 $S_n=C_n\sigma_h$ 的整数幂次，它是个循环群。因为 $(S_n)^n=C_n^n\sigma_h^n=\sigma_h^n$，当 n 为奇数时，该类点群包含水平反射 σ_h 和 C_n 的独立操作，故 n 为奇数的点群 $S_n=C_{nh}$。只有 n 为偶数的镜转动才能构成不同于 C_{nh} 的新点群。通常标记 $S_2=C_i=\{E, S_2=I\}$。对晶体而言，只存在 C_i，$S_4=\{E, C_4\sigma_h, C_2, C_4^3\sigma_h\}$ 和 $S_6=C_3\otimes C_i$ 三种晶体点群。它们的每个元素自成一类，其

极射赤面投影如图 3. 7 所示。

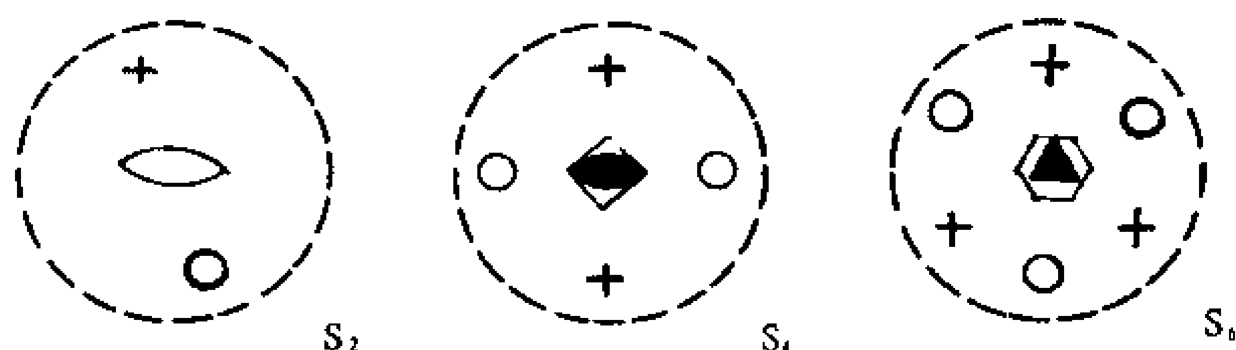


图 3. 7 点群 S_n 的极射赤面投影

3—6 点群 D_n

将点群 C_n 添加一个垂直于该旋转轴的 2 次轴，则意味着还有 $n-1$ 个水平 2 次轴，从而构成点群 D_n。由于 $D_1=\{E, C_2\}=C_2$，故 D_n 对应晶体点群只有 D_2，D_3，D_4 和 D_6 四种，它们的极射赤面投影如图 3. 8。

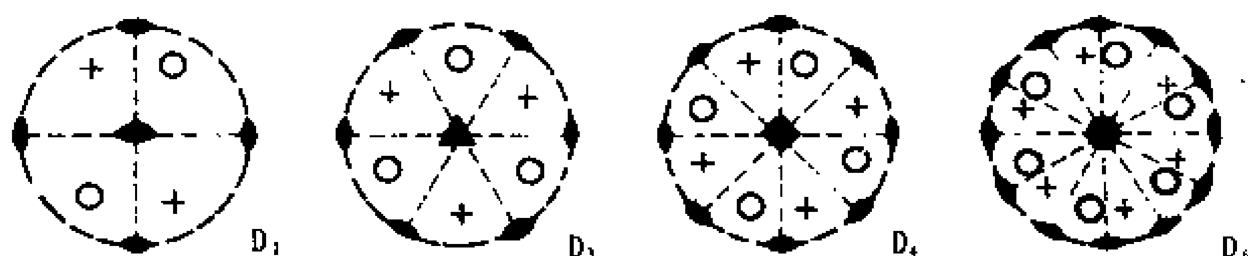


图 3. 8 点群 D_n 的极射赤面投影

点群 D_n 有 $2n$ 个群元。其主轴是 n 次双向轴，故 C_n 与 $C_n^{-1}=C_n^{n-1}$ 是同类元素。当 n 为奇数时，n 个水平 2 次轴是等价轴，这时 D_n 共分$\frac{n+3}{2}$个共轭类；而当 n 为偶数时，n 个 2 次轴分为两类，其 $2n$ 个群元分为$\frac{n+6}{2}$个共轭类。

3—7 点群 D_{nh}

将点群 D_n 增加一个水平反射面 σ_h，得到新点群 D_{nh}。由于 σ_h 与 D_n 的所有群元都对易，故 $D_{nh}=D_n\otimes C_s$。当 n 为偶数时，D_{nh}具有反演对称性，故 $D_{2mh}=D_{2m}\otimes C_i$。它是 $4n$ 阶群，其分类取决于 D_n，每类 D_n 群元对应 D_{nh}的两类。例如 D_3 的 6 个群元分为 3 类：E；C_3，C_3^{-1}；$3C_2$，则 D_{3h}的 12 个群元分为 6 类：E；σ_h；C_3，C_3^{-1}；S_3，S_3^{-1}；$3C_2$；$3\sigma_v=(C_2\sigma_h)$。只有 D_{2h}，D_{3h}，D_{4h}和 D_{6h}四种晶体点群，图 3．9 是它们的极射赤面投影。

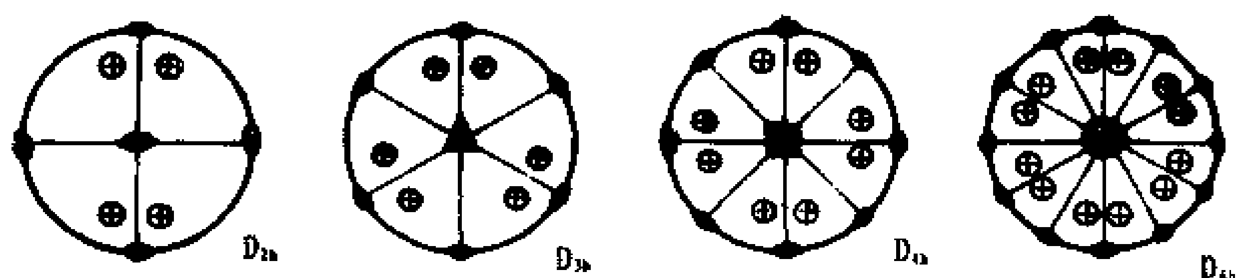


图 3．9　点群 D_{nh}的极射赤面投影

3—8 点群 D_{nd}

如果过点群 D_n 每对相邻的水平 C_2 轴夹角平分线和 n 次轴做竖直反射面 σ_d，就得到点群 D_{nd}。此类点群也有 $4n$ 个元素，其中 $2n$ 个是 D_n 的纯转动，n 个反射面 σ_d，还有 n 个绕 n 次轴的镜转动 $S_{2n}^{2k+1}=\sigma_h C_{2n}^{2k+1}$，$k=0$，1，$n-1$。因为每两个相邻的二次轴可通过 σ_d 相互交换，故 n 个 C_2 轴是一个等价类，同理，其 n 个反射面 σ_d 也属一类。因为

$$\sigma_d S_{2n}^{2k+1}\sigma_d^{-1}=\sigma_d\sigma_h C_{2n}^{2k+1}\sigma_d^{-1}=\sigma_h\sigma_d C_{2n}^{2k+1}\sigma_d=\sigma_h C_{2n}^{-2k+1}=S_{2n}^{-(2k+1)}$$

可知 S_{2n}^{2k+1}和 $S_{2n}^{-(2k+1)}$是共轭元素。点群 D_{nd}的 $4n$ 个元素可分为 $(n+3)$类。而当 $n=2m+1$（奇数）时，D_{nd}包含反演 I，故点群 $D_{2m+1,d}=D_{2m+1}\otimes C_i$。由于晶体不存在 $n>6$ 的镜转动 S_n，故 D_{nd}对应的晶

体点群只有 D_{2d}和 D_{3d}，其极射赤面投影如图 3.10。

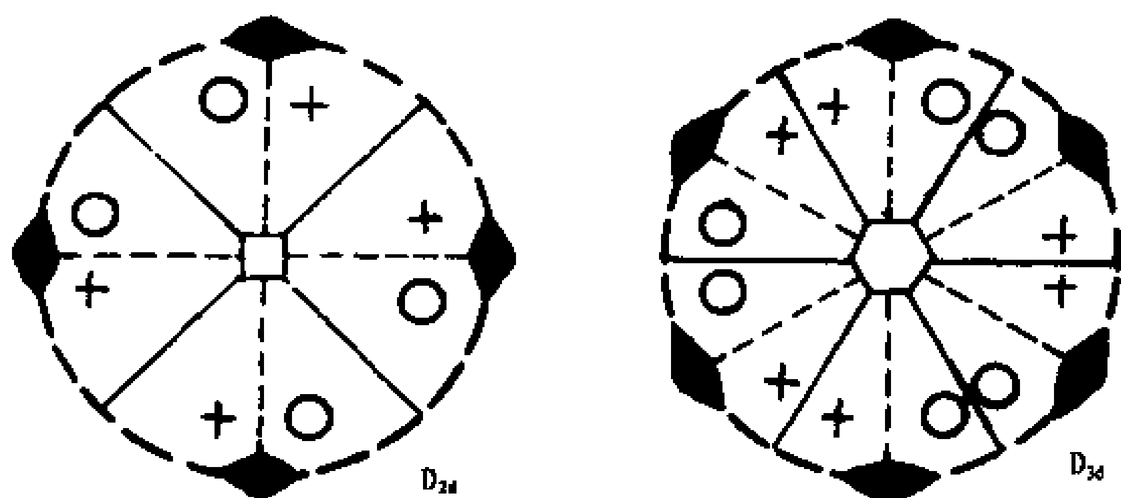


图 3.10 点群 D_{nd}的极射赤面投影

3—9 正多面体点群

以上介绍的点群通称着简单点群，其 $n>2$ 的高次转轴只有一个。这样得到的晶体点群只有 27 种。然而，当 $n>2$ 的高次转轴多于一个时，就将出现高对称性的正多面体点群。点群至少有一点不动，故几个转轴必相交于多面体的中心，其每个反射面也必过中心点。首先讨论有哪些正多面体对称点群。

设多面体共有 V 个顶点，F 个面和 E 个边，由尤拉（Euler）公式给出

$$V-E+F=2 \tag{3.3.5}$$

因每个边连结两个顶点，若每个顶点有 n 个边相交，即每个顶点对应$\frac{n}{2}$个边，V 个顶点相应的边数 $E=\frac{Vn}{2}$。若每个面由 s 个边围成，每个边又平分两个面，故又有 $E=\frac{F\cdot s}{2}$，从而 $V=\frac{F\cdot s}{n}$。将其代入方程（3.3.5）并化简得

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{s}=\frac{1}{2}+\frac{2}{Fs} \tag{3.3.6}$$

由于 $F\cdot s>0$，则得不等式

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{s}>\frac{1}{2} \tag{3.3.7}$$

从式（3.1.2）可知，当 $n=2$ 时，$F=2$，这实际是简单点群 D_n，它无法构成多面体。当 $n>2$，由上述两个方程给出表 3.1 的各种可能的正多面体对称点群。当 $n \geqslant 6$ 时，$s=2$，每个面只有两个边无法构成多面体。而对于 $n=5$ 或 $s=5$ 的正多面体，必然有一个过顶点或正五边形中心的 5 次转轴，我们知道，对于晶体点群不存在 C_5 对称操作，故对晶体而言，只需考虑点群 T 和 O，它们的极射赤面投影如图 3.11 所示

表 3.1　　　　正多面体对称点群

n	s	F	V	E	正多面体	点群
3	3	4	4	6	正四面体	T
3	4	6	8	12	正方体	O
4	3	8	8	12	正八面体	
3	5	12	20	30	正十二面体	Y
5	3	20	12	30	正二十面体	

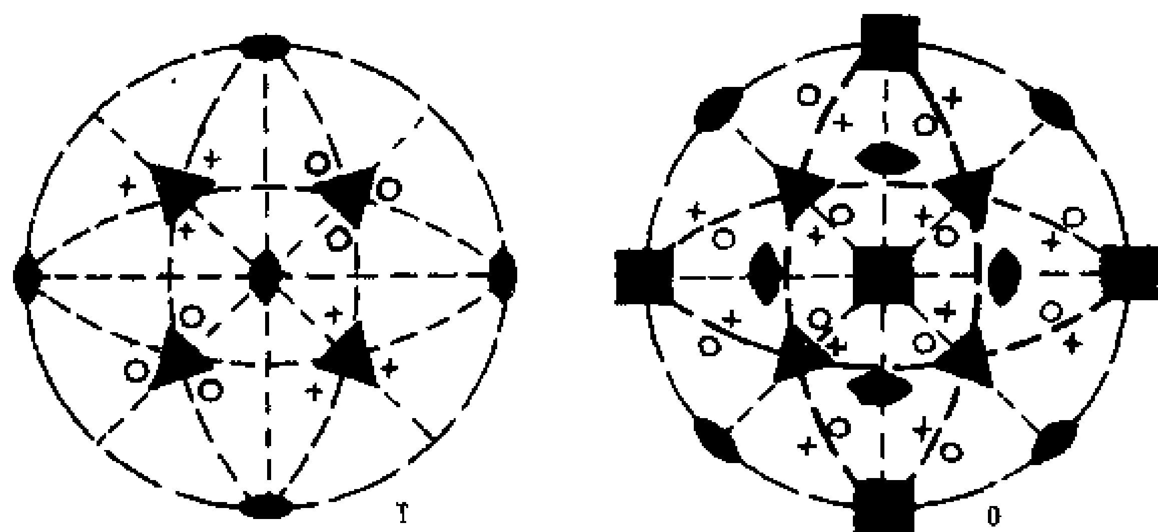


图 3.11　点群 T 和 O 的极射赤面投影

正方体和正八面体具有相同的对称性。在只考虑纯转动操作时，通常称之点群 O，它有 3 个相互垂直的 C_4 轴（两对面中心连线），4 个 C_3 轴（对角连线）和 6 个 C_2 轴（对边中点连线）。显然，6 个 C_2 轴等价，3 个 C_4 轴和 4 个 C_3 轴都是双向等价轴，故它的 24 个真转动群元可分 5 类：

$E;6C_2;4C_3,4C_3^2;3C_4,3C_4^3;3C_4^2$。根据有限群表示论，$O$ 群有 2 个 1 维，2 个 3 维和 1 个 2 维这五个不等价不可约表示。

将 O 群的 24 个真转动再添加反演 I 后，就构成最大的晶体点群 O_h，它将 O 的每个群元变为两个，由于

$O_h=O\otimes C_i$

其 48 个群元可分 10 类，这是个完全立方体对称群，它的极射赤面投影如图 3.12 所示。

T 群是正四面体的一切真转动构成的对称点群，它有 4 个等价的 C_3 轴（四个顶点与对面正三角形中心连线）和 3 个等价的 C_2 轴（对边中点连线），其 12 个群元分为 4 类：

$E;3C_2;4C_3;4C_3^2$

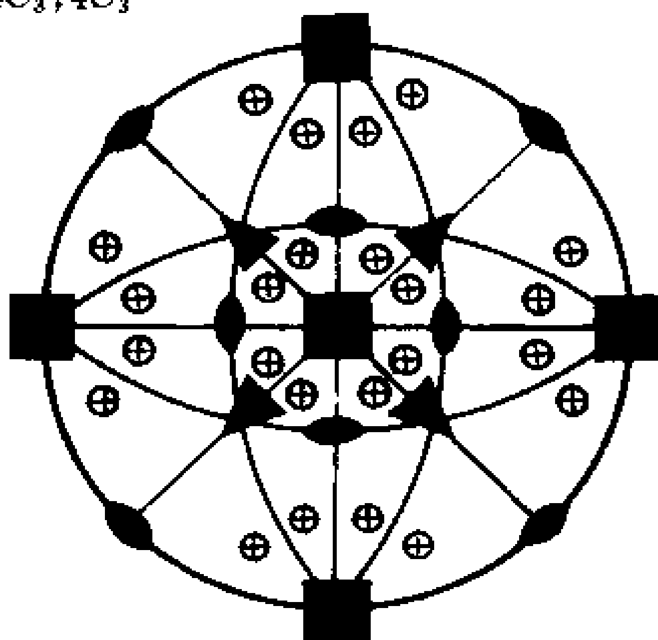


图 3-12　点群 O_h 的极射赤面投影

不难看出，若将正方体某个顶点及其相邻的三面角的三个正方形对角顶点两两连一条直线，就可得到一个正四面体。因此，点群 T 是 O 的一个子群，而 O 又是 O_h 的子群。

将 T 群的 12 个真转动添加 6 个等价反射面 σ_d，则构成点群 T_d，其每个反射面都经过一个 C_2 轴和两个 C_3 轴，从而使 C_3 成为双向轴，由于三个 C_2 轴相互垂直，且 σ_d 过另外两个 C_2 轴之间，因此，它有点群 D_{2d}的对称性，将每个 C_2 轴变为 S_4 轴，T_d 是正四面体完全对称性点群，其 24 个元素可分为 5 类：

E；$4C_3$，$4C_3^2$；$3S_4$；$3S_4^3$；$3S_4^2=3C_2$；$6\sigma_d$，

由点群 T 再添加反演 I 后就得到点群 T_h，此群包含三个相互垂直的反射面，从而使 C_3 轴变为 S_6 轴，它不是正四面体的对称性群，而是 O_h 的子群，显然

$T_h=T\otimes C_i$

它的 24 个元素分为 8 类，点群 T_d 和 T_h 的极射赤面投影如图3.13所示。

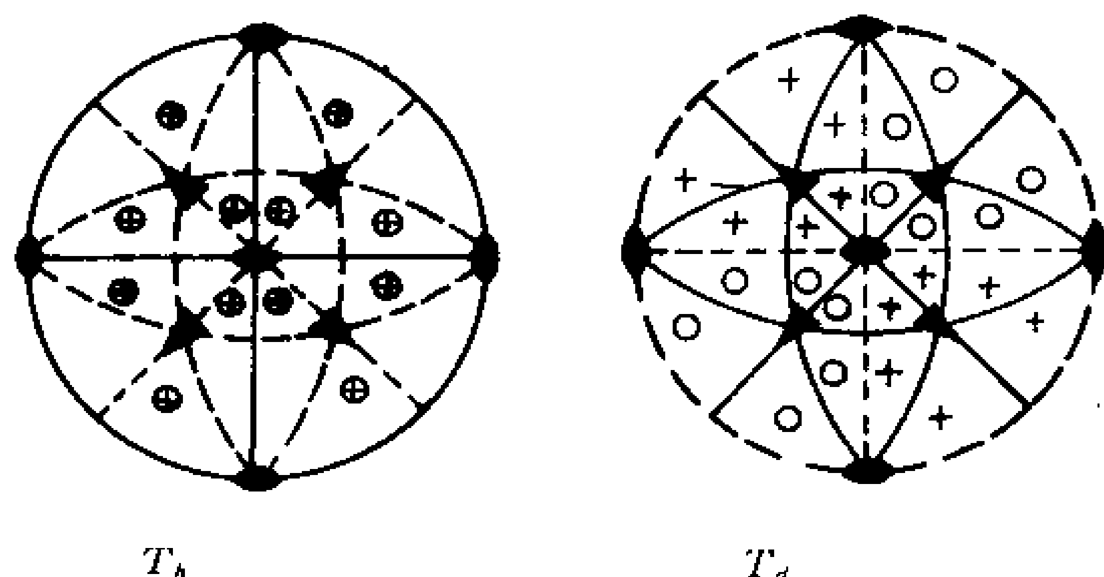


图 3.13　T_h 和 T_d 的极射赤面投影

§ 3.4 晶系和点群的国际符号

以上给出的 32 个点群是晶体对称性允许存在的点群，也称 32 个晶类，它是在不考虑五次轴和六次以上高次轴旋转对称操作下而得到的定点对称变换群，这些限制只适合于晶体，而对具体的几何图形和分子结构可以有任何高次轴旋转对称。例如，氢和氧等线状分子具有沿结合键的任意旋转对称性，即 C_{∞} 对称轴，这种具有反演中心的线状分子具有点群 $D_{\infty h}$ 对称性，而无反演中心的线状分子具有点群 $C_{\infty v}$ 对称性，分子 IF_7 却具有点群 D_{5h} 对称性，对于各种对称性的分子点群，可用极射赤面投影形象地表征，并对它的群元进行分类，这里不再单独讨论。

晶体的 32 个点群可根据三维晶格的基本平移矢量 $\vec{a}_i(i=1,2,3)$ 的长短及其两两间夹角 α,β 和 γ，将其分为七个如表 3.2 所示的晶系。

目前常用的点群记号有两种，一种是本书所采用的熊夫里(Schoenflies)记号，另一种是国际记号。

在国际记号中，n 次轴 C_n 记为 n，反射面 σ 以 m 代表，如果反射面垂直于 C_n 轴，则写着 $\frac{n}{m}$；而包含 n 次轴的反射面对称性，记为 nm，n 次反演轴 $\bar{C}_n$ 记为 $\bar{n}=IC_n$，对于镜转动 $S_n=C_n\sigma_h$，由于 $\sigma_h=C_2I$，故可用 $\bar{n}$ 来标记它。如

$$\bar{4}=IC_4=\sigma_h C_2 C_4=\sigma_h C_4^2 C_4=C_4^{-1}\sigma_h=S_4^{-1}$$

缩写的点群国际记号比完全国际记号更常用些。表 3.3 给出几种记号对照表。在结晶学和分子结构的研究中，熊夫里记号更为广泛。例如，水分子属于点群 C_{2v}，甲烷分子是点群 T_d。而国际记号只用于晶体，不能用于分子对称性，它只有表 3.3 给出的 32 种，若将它引伸到空间群，则有 230 种，熊夫里记号标识点群更为广泛，

例如，CO_2 分子为点群 $D_{\infty h}$对称性，甚至有不少分子具有点群 D_{5d} 和 D_{5h}对称性，然而，国际记号比较严格，特别是在空间群中，可清楚地标明哪个方向旋转轴、反射面或滑移面等。

表 3.2　　　　晶体点群的七个晶系

晶系	点群	平行六面体形状
立方	T, T_h, T_d, O, O_h	$a_1=a_2=a_3, \alpha=\beta=\gamma=90°$
六方	$C_6, C_{3h}, C_{6h}, C_{6v}$ D_{3h}, D_6, D_{6h}	$a_1=a_2\neq a_3, \alpha=\beta=90°$ $\gamma=120°$
四方	C_4, S_4, C_{4h}, C_{4v} D_{2d}, D_4, D_{4h}	$a_1=a_2\neq a_3, \alpha=\beta=\gamma=90°$
三方	C_3, S_6, C_{3v}, D_3, D_{3d}	$a_1=a_2=a_3, \alpha=\beta=\gamma\neq 90°$
正交	C_{2v}, D_2, D_{2h}	$a_1\neq a_2\neq a_3, \alpha=\beta=\gamma=90°$
单斜	$C_{1h}=C_s, C_2, C_{2h}$	$a_1\neq a_2\neq a_3, \alpha=\gamma=90°, \beta\neq 90°$
三斜	$C_1, S_2=C_i$	其它任意平行六面体

表 3.3　　点群记号对照表

熊夫里	完全国际记号	缩写国际记号
C_n	n	•
S_1 或 $C_{1h}=C_s$	m	
$S_2=C_i$	$\bar{1}$	
S_4	$\bar{4}$	
S_6	$\bar{3}$	
C_{2h}	$\frac{2}{m}$	$2/m$
C_{3h}	$\bar{6}$	
C_{4h}	$\frac{4}{m}$	$4/m$
C_{6h}	$\frac{6}{m}$	$6/m$
C_{2v}	$2mm$	
C_{3v}	$3m$	
C_{4v}	$4mm$	
C_{6v}	$6mm$	
$D_2=V$	222	
D_3	32	
D_4	422	
D_6	622	
D_{2h}	$\frac{2}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}$	mmm

熊夫里	完全国际记号	缩写国际记号
D_{3h}	$\bar{6}m2$	
D_{4h}	$\frac{4}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}$	$4/mmm$
D_{6h}	$\frac{6}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}$	$6/mmm$
D_{2d}	$\bar{4}2m$	
D_{3d}	$\bar{3}\frac{2}{m}$	$\bar{3}m$
T	23	
T_h	$\frac{2}{m}\bar{3}$	$m3$
T_d	$\bar{4}3m$	
O	432	
O_h	$\frac{4}{m}\bar{3}\frac{2}{m}$	$m3m$

§3.5 点群的不可约表示

上面已讨论了各种点群的结构及其分类，根据第二章给出的有限群表示论可以求得其不可约表示及其特征标，由于 32 个晶体点群在固体物理中常常会遇到，故在表 3.8 中给出所有晶体点群的特征标表，表中详细列出 11 个第一类点群以及与其同构的点群，其它较复杂的第二类点群的特征标可以两个小点群的特征标乘积表示。这些点群的同构和直积关系如表 3.4 所示。

表 3.4　　　32 晶体点群的相互关系

第一类点群 G	C_1	C_2	C_3	C_4	C_6	D_2	D_3	D_4	D_6	T	O
直积群 $G\otimes C_i$	S_2	C_{2h}	S_6	C_{4h}	C_{6h}	D_{2h}	D_{3d}	D_{4h}	D_{6h}	T_h	O_h
直积群 $G\otimes C_S$		C_S	C_{2h}	C_{3h}	C_{4h}	C_{6h}	D_{2h}	D_{3h}	D_{4h}	D_{6h}	
同构于 G 的第二类点群			C_S			C_{3h}	C_{2V}		C_{4V}	C_{6V}	
					S_4			C_{3V}	D_{2d}	D_{3h}	
			C_i			S_6	C_{2h}			D_{3d}	

点群 C_i,C_S,C_n,C_{nh},D_2,S_4,S_6 和 C_{2v}等都是阿贝尔群,它们只有 1 维不可约表示,其表示与特征标相同,而 C_{3v},D_3 和 T 等非阿贝尔简单点群,其特征标表可根据正交关系不难求得。由表 3.4 可看出,不少较复杂点群都是这些较简单点群与 C_i 或 C_S 之直积,因此它们的特征标可很快求得。

对于分子点群 C_{nv},C_{nh},D_n 和 D_{nh}等,可以 $n\to\infty$,相应的点群记为 $C_{\infty v}$,$C_{\infty h}$,D_∞和 $D_{\infty h}$。因为绕主轴转 φ 角 $R(\varphi)$和转 $-\varphi$ 角 $R(-\varphi)$是同类元素,所有的垂直于主轴的 C_2' 轴或竖直反射面 σ_v 是一类,故点群 $C_{\infty v}$和 D_∞每类转动有如下的分类结构:

$C_{\infty v}=\{E;R(\varphi),R(-\varphi);\sigma_v\}$和 $D_\infty=\{E;R(\varphi),R(-\varphi);C_2'\}$每类转动都对应两个 1 维表示和一个 2 维表示。由于转动可为 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ 任意角,故有无穷多个 2 维表示,当 n 为任何正整数时,$(x+iy)^n$ 的实部和虚部生成 $C_{\infty v}$和 D_∞的一个 2 维不可约表示,则它们的特征标如表 3.5 所示。

表 3.5　　　点群 $C_{\infty v}$和 D_∞的特征标表

不可约表示	E	$R(\varphi)$,$R(-\varphi)$	σ_v 或 C_2'	基函数 $C_{\infty v}$　D_∞
A_1	1	1	1	x^2+y^2
A_2	1	1	-1	z
E_1	2	$2\cos\varphi$	0	(x,y)
E_2	2	$2\cos2\varphi$	0	$(x^2-y^2,2xy)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

同理可求出点群 $C_{\infty h}$的特征标，如表 3.6 所示，由于点群 $D_{\infty h}$可按不同方式写为直积群，例如

表 3.6　　　　$C_{\infty h}$的特征标表

$D^{(\alpha)}$	E	$R(\varphi),R(-\varphi)$	IC_2'
A_1	1	1	1
A_2	1	1	-1
E_n	2	$2\cos n\varphi$	0

$D_{\infty h}=D_{\infty}\otimes C_S=C_{\infty v}\otimes C_S=C_{\infty v}\otimes C_i$

$D_{\infty h}$的类结构为$\{E;R(\varphi),R(-\varphi);C_2';I;IR(\varphi),IR(-\varphi);IC_2'\}$。在点群表示论中，通常以字母 A 或 B 代表 1 维表示，E 和 F 分别代表 2 维和 3 维表示，其中 A 代表该表示的基函数相应主轴 C_n 是对称的，而 B 相应转动 C_n 是反对称的。为了标征空间反演对称性，通常以下标字母 g 和 u 分别代表反演下的偶表示和奇表示。表 3.6 给出分子物理和化学中所惯用的点群 $D_{\infty h}$的特征标表，在时间反演对称下，成对的复共轭表示是简并的，我们用括号将它们括在一起。

表 3.7　　　　点群 $D_{\infty h}$的特征标表

$D^{(\alpha)}$	E	$2R(\varphi)$	C_2'	I	$2IR(\varphi)$	IC_2'
A_{1g}	1	1	1	1	1	1
A_{1u}	1	1	1	−1	−1	−1
A_{2g}	1	1	−1	1	1	−1
A_{2u}	1	1	−1	−1	−1	1
E_{1g}	2	$2\cos\varphi$	0	2	$2\cos\varphi$	0
E_{1u}	2	$2\cos\varphi$	0	−2	$-2\cos\varphi$	0
E_{2g}	2	$2\cos 2\varphi$	0	2	$2\cos 2\varphi$	0
E_{2u}	2	$2\cos 2\varphi$	0	−2	$-2\cos 2\varphi$	0
·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·

表 3.8　　32个晶体点群的特征标表

C_1:	E
A	1

C_i:			E	I
	C_2:		E	C_2
		C_s:	E	σ
A_g	A;z	A';x,y	1	1
A_u;x,y,z	B;x,y	A'';z	1	-1

C_{2h}:			E	C_2	σ_h	I
	C_{2v}:		E	C_2	σ_v	σ'_v
		$D_2 \equiv V$	E	C_z	C_y	C_x
A_g	A_1;z	A_1	1	1	1	1
B_g	B_2;y	B_3;x	1	-1	-1	1
A_u;z	A_2	B_1;z	1	1	-1	-1
B_u;x,y	B_1;x	B_2;y	1	-1	1	-1

C_3:	E	C_3	C_3^2
A;z	1	1	1
E;$x \pm iy$	1	ε	ε^2
	1	ε^2	ε

$\varepsilon = e^{2\pi i/3}$

C_4:	S_4:	E / E	C_4 / S_4	C_4^2 / S_4^2	C_4^3 / S_4^3
$A;z$	A	1	1	1	1
B	$B;z$	1	-1	1	-1
$E;x\pm iy$	$E;x\pm iy$ $\{$	1	i	-1	$-i$
		1	$-i$	-1	i

C_{3v}:	D_3:	E / E	$2C_3$ / $2C_3$	$3\sigma_v$ / $3C'_2$
$A_1;z$	A_1	1	1	1
A_2	$A_2;z$	1	1	-1
$E;x,y$	$E;x,y$	2	-1	0

C_6:	E	C_6	C_6^2	C_6^3	C_6^4	C_6^5
$A;z$	1	1	1	1	1	1
B	1	-1	1	-1	1	-1
$E_1\{$	1	ω^2	$-\omega$	1	ω^2	$-\omega$
	1	$-\omega$	ω^2	1	$-\omega$	ω^2
$E_2;x\pm iy$	$\{$ 1	ω	ω^2	-1	$-\omega$	$-\omega^2$
	1	$-\omega^2$	ω	-1	ω^2	ω

$\omega=2\pi i/6$

C_{4v}:	D_4:	D_{2d}:					
			E	C_4^2	$C_4(2)$	$\sigma_v(2)$	$\sigma_v'(2)$
			E	C_4^2	$C_4(2)$	$C'_2(2)$	$C''_2(2)$
			E	C_2	$S_4(2)$	$C'_2(2)$	$\sigma_d(2)$
$A_1;z$	A_1	A_1	1	1	1	1	1
A_2	$A_2;z$	A_2	1	1	1	-1	-1
B_1	B_1	B_1	1	1	-1	1	-1
B_2	B_2	$B_2;z$	1	1	-1	-1	1
$E;x,y$	$E;x,y$	$E;x,y$	2	-2	0	0	0

D_6:			E	C_6^3	$C_6^2(2)$	$C_6(2)$	$C'_2(3)$	$C''_2(3)$
	C_{6v}:		E	C_6^3	$C_6^2(2)$	$C_6(2)$	$\sigma_v(3)$	$\sigma_{v'}(3)$
		D_{3h}:	E	σ_h	$S_6^2(2)$	$S_6(2)$	$C'_2(3)$	$\sigma_v(3)$
A_1	$A_1;z$	A_1'	1	1	1	1	1	1
$A_2;z$	A_2	A_2'	1	1	1	1	−1	−1
B_1	B_2	A_1''	1	−1	1	−1	1	−1
B_2	B_1	$A_2'';z$	1	−1	1	−1	−1	1
E_2	E_1	$E';x,y$	2	2	−1	−1	0	0
$E_1;x,y$	$E_2;x,y$	E''	2	−2	−1	1	0	0

T:	E	$C_2(3)$	$C_3(4)$	$C_3^2(4)$
A	1	1	1	1
E	1	1	ε	ε^2
	1	1	ε^2	ε
$F;x,y,z$	3	−1	0	0

O:		E	$C_3(8)$	$C_4^2(3)$	$C_2(6)$	$C_4(6)$
	T_d:	E	$C_3(8)$	$S_4^2(3)$	$\sigma_d(6)$	$S_4(6)$
A_1	A_1	1	1	1	1	1
A_2	A_2	1	1	1	−1	−1
E	E	2	−1	2	0	0
F_2	$F_2;x,y,z$	3	0	−1	1	−1
$F_1;x,y,z$	F_1	3	0	−1	−1	1

C_{3h}: S_6:	E E	$C_3^2\sigma_h = IC_6$ S_6	C_3 C_3	$\sigma_h = IC_2$ I	C_3^2 C_3^2	$C_3\sigma_h = IC_6^{-1}$ S_6^5
A' A_g	1	1	1	1	1	1
A'' A_u	1	-1	1	-1	1	-1
E'' E_u {	1	ω	ω^2	-1	$-\omega$	$-\omega^2$
	1	$-\omega^2$	$-\omega$	-1	ω^2	ω
E' E_g {	1	ω^2	$-\omega$	1	ω^2	$-\omega$
	1	$-\omega$	ω^2	1	$-\omega$	ω^2

C_{4h}:	E	C_4	C_4^2	C_4^{-1}	I	IC_4	IC_4^2	IC_4^{-1}
A_g	1	1	1	1	1	1	1	1
B_g	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
E_g {	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$
	1	$-i$	-1	i	1	$-i$	-1	i
A_u	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
B_u	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
E_u {	1	i	-1	$-i$	-1	$-i$	1	i
	1	$-i$	-1	i	-1	i	1	$-i$

D_{2h}:	E	C_2	C'_2	C''_2	I	IC_2	IC'_2	IC''_2
A_{1g}	1	1	1	1	1	1	1	1
B_{1g}	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
B_{2g}	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
A_{2g}	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
A_{1u}	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
B_{1u}	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
B_{2u}	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
A_{2u}	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1

C_{6h}:	E	C_6	C_3	C_2	C_3^{-1}	C_6^{-1}	I	IC_6	IC_3	IC_2	IC_3^{-1}	IC_6^{-1}
A_g	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B_g	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1
E'_g {	1	ω	ω^2	−1	$-\omega$	$-\omega^2$	1	ω	ω^2	−1	$-\omega$	$-\omega^2$
	1	$-\omega^2$	$-\omega$	−1	ω^2	ω	1	$-\omega^2$	$-\omega$	−1	ω^2	ω
E''_g {	1	ω^2	$-\omega$	1	ω^2	$-\omega$	1	ω^2	$-\omega$	1	ω^2	$-\omega$
	1	$-\omega$	ω^2	1	$-\omega$	ω^2	1	$-\omega$	ω^2	1	$-\omega$	ω^2
A_u	1	1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
B_u	1	−1	1	−1	1	−1	−1	1	−1	1	−1	1
E'_u {	1	ω	ω^2	−1	$-\omega$	$-\omega^2$	−1	$-\omega$	$-\omega^2$	1	ω	ω^2
	1	$-\omega^2$	$-\omega$	−1	ω^2	ω	−1	ω^2	ω	1	$-\omega$	$-\omega$
E''_u {	1	ω^2	$-\omega$	1	ω^2	$-\omega$	−1	$-\omega^2$	ω	−1	$-\omega^2$	ω
	1	$-\omega$	ω^2	1	$-\omega$	ω^2	−1	ω	$-\omega^2$	−1	ω	$-\omega^2$

D_{6h}:	E	C_6 C_6^{-1}	C_3 C_3^{-1}	C_2	C_{2x} $2C'_2$	C_{2y} $2C''_2$	I	IC_6 IC_6^{-1}	IC_3 IC_3^{-1}	IC_2	IC_{2x} $2IC'_2$	IC_{2y} $2IC''_2$
A_{1g}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
A_{2g}	1	1	1	1	−1	−1	1	1	1	1	−1	−1
B_{1g}	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1
B_{2g}	1	−1	1	−1	−1	1	1	−1	1	−1	−1	1
E_{2g}	2	−1	−1	2	0	0	2	−1	−1	2	0	0
E_{1g}	2	1	−1	−2	0	0	2	1	−1	2	0	0
A_{1u}	1	1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
A_{2u}	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	1	1
B_{1u}	1	−1	1	−1	1	−1	−1	1	−1	1	−1	1
E_{2u}	1	−1	1	−1	−1	1	−1	1	−1	1	1	−1
E_{2u}	2	−1	−1	2	0	0	−2	1	1	−2	0	0
E_{1u}	2	1	−1	−2	0	0	−2	−1	1	2	0	0

D_{3d}	E	C_3, C_3^{-1}	$3C'_2$	I	IC_3, IC_3^{-1}	$3IC'_2$
A_{1g}	1	1	1	1	1	1
A_{2g}	1	1	-1	1	1	-1
E_g	2	-1	0	2	-1	0
A_{1u}	1	1	1	-1	-1	-1
A_{2u}	1	1	-1	-1	-1	1
E_u	2	-1	0	-2	1	0

T_h:	E	$4C_3$	$4C_3^{-1}$	$3C_2$	I	$4IC_3$	$4IC_3^{-1}$	$3IC_2$
A_g	1	1	1	1	1	1	1	1
E_g	1	Φ	Φ^2	1	1	Φ	Φ^2	1
	1	Φ^2	Φ	1	1	Φ^2	Φ	1
F_g	3	0	0	-1	3	0	0	-1
A_u	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
E_u	1	Φ	Φ^2	1	-1	$-\Phi$	$-\Phi^2$	-1
	1	Φ^2	Φ	1	-1	$-\Phi^2$	$-\Phi$	-1
F_u	3	0	0	-1	-3	0	0	1

D_{4h}:	E	$2C'_2$	C_2	C_4, C_4^{-1}	$2C''_2$	I	$2IC'_2$	IC_2	IC_4, IC_4^{-1}	$2IC''_2$
A_{1g}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B_{1g}	1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1
B_{2g}	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1
A_{2g}	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1
E_g	2	0	-2	0	0	2	0	-2	0	0
A_{1u}	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1
B_{1u}	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1
B_{2u}	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
A_{2u}	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1
E_u	2	0	-2	0	0	-2	0	2	0	0

O_h:	E	$4C_3$ $4C_3^2$	$3C_2$	$3C_4$ $3C_4^3$	$6C_2'$	I	$4IC_3$ $4IC_3^2$	$3IC_2$	$3IC_4$ $3IC_4^3$	$6IC_2'$
A_{1g}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
A_{2g}	1	1	1	−1	−1	1	1	1	−1	−1
E_g	2	−1	2	0	0	2	−1	2	0	0
F_{1g}	3	0	−1	1	−1	3	0	−1	1	−1
F_{2g}	3	0	−1	−1	1	3	0	−1	−1	1
A_{1u}	1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	−1
A_{2u}	1	1	1	−1	−1	−1	−1	−1	1	1
E_u	2	−1	2	0	0	−2	1	−2	0	0
F_{1u}	3	0	−1	1	−1	−3	0	1	−1	1
F_{2u}	3	0	−1	−1	1	−3	0	1	1	−1

§ 3.6 晶体空间群

晶体是由分子、原子或离子有规则排列而成。它们组成所谓晶格，这些组元的位置称为晶格的结点，结点集合称之点阵。在晶格中总可取一定单元，并将它不断重复地平移，就可得到整个晶格，这个基本单元称之晶胞，三个线性独立的最少平移矢量为$\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$和$\vec{a}_3$。通常选取晶胞和平移矢量可有多种方式，连续平移后都将给出完全一样的晶格。自然，我们应选取最小的晶胞，但有时为了更好地研究晶格的对称性，而宁可选取较大的晶胞，通常认为晶体充满全空间，如果晶体中两点或两个方向具有相同的理化性质和几何

性质，则称这两点或两方向是等价的，晶体一切等价点和方向的变换操作集合将构成一个群，称之晶体的空间群。其元素有平移，点操作及平移与点操作的组合。

每个晶体有一个空间群 S 和平移群 T（格群），显然 T 是 S 的不变子群，T 所属的系和型称之晶体的晶系与晶型，下面将证明空间群中单纯点操作不一定属于 S，但必构成 T 所属晶系中的一个晶体点群。晶体空间群 S 的一切对称操作中纯点对称操作属于 32 个点群的哪一个，则称此晶体为哪个晶类。

总之，每种晶体都有平移操作构成的格群 T，这使晶体只有 7 个晶系 14 个晶型，每个格点及其周围的原子配置不是任意的，必须使其具有的对称操作 $\{R(g_\alpha)|\vec{\tau}(g_\alpha)\}$ 中的点操作 $R(g_\alpha)$ 构成所属晶系中的一个晶类，从而使得不同的晶体结构，即不同对称性的空间群只有 230 个，下面仅对空间群的基本概念作简单介绍。

6—1 平移变换和空间群元

设 ox，oy 和 oz 是三个相互正交的笛氏坐标轴，若先绕原点 o 旋转 $R(g_\alpha)$ 后再做平移 $\vec{\tau}(g_\alpha)$，使之原点 o 移至 o'，从而得到另一个笛氏坐标系 $o'x'$，$o'y'$ 和 $o'z'$。空间任一点在两个坐标系中的位置矢量满足关系

$$\vec{r'}=R(g_\alpha)\vec{r}+\vec{\tau}(g_\alpha) \tag{3.6.1}$$

通常可将上式坐标变换算符记为 $\{R(g_\alpha)|\vec{\tau}(g_\alpha)\}$，则

$$\vec{r'}=\{R(g_\alpha)|\vec{\tau}(g_\alpha)\}\vec{r} \tag{3.6.2}$$

不难证明，以上形式的各种旋转和平移操作集合将构成 R_3 空间的一种变换群——空间群，而 $R(g_\alpha)$ 和 $\vec{\tau}(g_\alpha)$ 分别称之空间群的旋转和平移算符，考虑两个相继的空间群操作，若

$$\vec{r'}=\{R(g_\beta)|\vec{\tau}(g_\beta)\}\vec{r}\equiv R(g_\beta)\vec{r}+\vec{\tau}(g_\beta)$$

$$\vec{r''}=\{R(g_\alpha)|\vec{\tau}(g_\alpha)\}\vec{r'}\equiv R(g_\alpha)\vec{r'}+\vec{\tau}(g_\alpha)$$

则立即可得到

$$\vec{r}'' = R(g_\alpha)R(g_\beta)\vec{r} + [R(g_\alpha)\vec{\tau}(g_\beta) + \vec{\tau}(g_\alpha)] \tag{3.6.3}$$

由式(3.6.3)可看出，平移和旋转操作一般不对易，空间群的两群元乘积为

$$\{R(g_\alpha g_\beta) | \vec{\tau}(g_\alpha \cdot g_\beta)\} = \{R(g_\alpha)R(g_\beta) | R(g_\alpha)\vec{\tau}(g_\beta) + \vec{\tau}(g_\alpha)\} \tag{3.6.4}$$

由(3.6.1)式可得到其群元的逆变换为

$$\vec{r} = R(g_\alpha)^{-1}\vec{r}' - R(g_\alpha)^{-1}\vec{\tau}(g_\alpha)$$

$$\{R(g_\alpha) | \vec{\tau}(g_\alpha)\}^{-1} = \{R(g_\alpha)^{-1} | -R(g_\alpha)^{-1}\vec{\tau}(g_\alpha)\} \tag{3.6.5}$$

$$\{R(g_\alpha g_\beta) | \vec{\tau}(g_\alpha g_\beta)\}^{-1} = \{R(g_\beta) | \vec{\tau}(g_\beta)\}^{-1}\{R(g_\beta) | \vec{\tau} g_\alpha)\}^{-1} \tag{3.6.5}$$

通常称 $\vec{\tau}(g_\alpha)=0$ 的操作为纯转动，而 $R(g_\alpha)=1$ 的操作为纯平移。

6—2 晶体平移群及其不可约表示

理想晶体是由位于格点的原子或离子周期性排列所构成，这些格点的位置如(3.3.1)式所示。在普通晶体中，其单位晶胞密度约为 10^{21}/厘米^3，所以在只考虑晶体内部性质而乎略其表面效应时，可将晶体相对于晶胞视为无限大，这些无限大晶体一般具有某种点群对称性，但目前我们只考虑其平移对称性。一切平移对称操作构成晶体的平移群 $G_T=\{P(\vec{n})\}\equiv\{P(n_1n_2n_3)\}$，群元 $P(\vec{n})$将使任一点 $\vec{r}$平移到$\vec{r}'=\vec{r}+\vec{n}$，即

$$P(\vec{n})\vec{r} = \vec{r} + \vec{n} = \vec{r} + n_1\vec{a}_1 + n_2\vec{a}_2 + n_3\vec{a}_3 \tag{3.6.7}$$

对某种晶体，其原初平移矢量$\vec{a}_S(s=1,2,3)$是确定的，n_S 可为任意整数，故该晶体相应的平移群 $G_T\equiv G_T(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)$根据(3.6.7)式可知

$$P(\vec{n})P(\vec{m})\vec{r} = P(\vec{n})(\vec{r}+\vec{m}) = \vec{r}+\vec{m}+\vec{n} = P(\vec{m}+\vec{n})\vec{r} \tag{3.6.8}$$

上式告诉我们群 G_T 是个阿贝尔群，沿着原初矢量$\vec{a}_i$的每个方向的平移将构成一个循环群 C_T^s，由此晶体平移群可分成三个循环群的直积

$$G_T = C_T^1 \otimes C_T^2 \otimes C_T^3 \tag{3.6.9}$$

其每个群元自成一类，它只有 1 维不可约表示。若以 $T(\vec{n}) = T(n_1n_2n_3)$ 代表 G_T 的表示，其单位元素 $P(000)$ 对应的表示为 $T(000)=1$，令群元 $P(100)$ 对应的表示 $T(100)=\alpha$，则由(3.6.8)式可推得 $T(n_100)=[T(100)]^{n_1}=\alpha^{n_1}$，对于幺正表示，只能取 $\alpha=\exp(-2\pi ik_1)$，k_1 是实数，不同的 k_1 对应不同的表示，故可以 k_1 来标记表示，群元 $P(n_100)$ 对应的表示

$$T_{n_100}^{k_100} = \exp(-2\pi ik_1n_1) \tag{3.6.10}$$

由于 n_1 是整数，此式说明，对任意整数 p，k_1 和 $k'_1=k_1+p$ 标记的两个表示相同。因此，描述该群全部不可约幺正表示只需取 k_1 满足 $0 \leqslant k_1 < 1$。晶体平移群 $G_T(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)$的 1 维不可约幺正表示是类似于(3.6.10)式的三个不可约表示的直积。

$$\begin{aligned} T_{(\vec{n})}^{(\vec{k})} &= T_{(n_100)}^{(k_100)} \otimes T_{(0n_20)}^{(0k_20)} \otimes T_{(00n_3)}^{(00k_3)} \\ &= \exp[-2\pi i(k_1n_1+k_2n_2+k_3n_3)] \end{aligned} \tag{3.6.11}$$

设晶体在$\vec{a}_i$方向有 N_i 个格点，取周期性边条件为

$$\vec{r}-N_1\vec{a}_1=\vec{r},\ \vec{r}-N_2\vec{a}_2=\vec{r},\ \vec{r}-N_3\vec{a}_3=\vec{r} \tag{3.6.12}$$

则对应的平移算符 $P(N_S)=E$，$(s=1,2,3)$，沿$\vec{a}_1$方向的平移群元对应的表示则为

$$T_{(N_100)}^{(k_100)} = \exp[-2\pi ik_1N_1] = \exp[-2\pi im_1],\ m_1=0,1,2,\cdots,N_1-1 \tag{3.6.13}$$

这表明 $k_1=\frac{m_1}{N_1}$，$m_1=0,1,2,...,N_1-1$，类似地有 $k_2=\frac{m_2}{N_2}$和 $k_3=\frac{m_3}{N_3}$. 所以，这 N_1 个不同的实数 k_1，对应着$\vec{a}_1$方向平移群 C_T^1 的 N_1

个不等价1维表示，群C_7^2和C_7^3也有类似结果。从而可将晶体平移群的不可约表示(3.6.11)式改写为

$$T^{(\vec{k})}_{(\vec{n})}=\exp[-2\pi i(\frac{m_1n_1}{N_1}+\frac{m_2n_2}{N_2}+\frac{m_3n_3}{N_3})\qquad(3.6.14)$$

这里$0\leqslant m_s<N_s(s=1,2,3)$，改变整数$m_s$的取值，将有$N_1N_2N_3$个不同的矢量$\vec{k}$，故群$G_T$共有$N_1N_2N_3$个不等价的1维表示。

原初平移矢量$\vec{a}_i$既不正交也不归一，虽然n_i是$\vec{n}$沿$\vec{a}_i$的分量，但无法将上式的指数部分写为两个矢量的标积形式，故我们定义所谓倒格子基矢$\vec{b}_i(i=1,2,3)$.

$$\vec{b}_i=\frac{2\pi(\vec{a}_j\times\vec{a}_k)}{v_a},v_a=\vec{a}_1\cdot(\vec{a}_2\cdot\vec{a}_3)$$

$$(i,j,k=1,2,3\text{的循环})\qquad(3.6.15)$$

不难证明

$$\vec{b}_i\vec{a}_j=2\pi\delta_{ij}\qquad(3.6.16)$$

在倒易空间中矢量$\vec{k}$可表示为$\vec{b}_i$的组合

$$\vec{k}=k_1\vec{b}_1+k_2\vec{b}_2+k_3\vec{b}_3\qquad(3.6.17)$$

因此

$$\vec{k}\cdot\vec{n}=\sum_{ij}k_in_j\vec{b}_i\vec{a}_j=2\pi\sum_i k_in_i\qquad(3.6.18)$$

则晶体平移群的不可约表示可简写为

$$T^{(\vec{k})}_{(\vec{n})}=\exp(-i\vec{k}\cdot\vec{n})\qquad(3.6.19)$$

前面曾指出，对于整数p，$T^{(k_1)}_{(n_1)}$和$T^{(k_1+p)}_{(n_1 00)}$是同一个不可约表示。在倒易空间中，若引入所谓倒格矢$\vec{K}_m$来表述这个性质更为方便，其中

$$\vec{K}_m=m_1\vec{b}_1+m_2\vec{b}_2+m_3\vec{b}_3\qquad(3.6.20)$$

m_i都是整数，不难看出以$\vec{k}$和$\vec{k}+\vec{K}_m$标记的表示是等价的。

$$T^{(\vec{k}+\vec{K}_m)}_{(\vec{n})}=\exp[-i(\vec{k}+\vec{K}_m)\vec{n}]=\exp(-i\vec{k}\cdot\vec{n})=T^{(\vec{k})}_{(\vec{n})}$$

由于群 G_T 只有 1 维不可约表示，故以 $\vec{k}$ 和 $\vec{k'}$ 标记的两个不可约表示的直积为

$$T_{(\vec{n})}^{(\vec{k})} \otimes T_{(\vec{n})}^{(\vec{k'})} = \exp[-i(\vec{k}+\vec{k'})\vec{n}] = T_{(\vec{n})}^{(\vec{k}+\vec{k'})}$$

由于倒格矢 $\vec{K}_m$ 的特性，可使其直积表示又写成

$$T_{(\vec{n})}^{(\vec{k})} \otimes T_{(\vec{n})}^{(\vec{k'})} = T^{(\vec{k}+\vec{k'}+\vec{K}_m)} \tag{3.6.21}$$

利用倒易空间的 $\vec{k}$ 矢量可定义固体物理中常用的布里渊(Brillouin)区，首先连结原点与所有临近的倒格矢端点，再做每条连线的垂直平分面，而由这些平面围成布里渊区。不难证明空间格点与布里渊区具有相同的对称性。

按照(2.7.2)式投影算符的定义，同样可得到晶体平移群不可约表示 $T_{(\vec{n})}^{(\vec{k})}$ 的投影算符 $O(\vec{k})$ 及其正交关系：

$$O_{(\vec{k})} = \frac{1}{N}\sum_{n}\exp(i\vec{k}\cdot\vec{n})P(\vec{n}) \tag{3.6.22}$$

$$O_{(\vec{k})}O_{(\vec{k'})} = O(\vec{k})\delta(\vec{k'},\vec{k}+\vec{K}_m) \tag{3.6.23}$$

若 $O(\vec{k})$ 对任选的晶胞试用态函数作用，则将给出固体物理中的所谓布洛赫(Bloch)态函数 $\Psi_{\vec{k}}$。

6—3 晶体空间群的不可约表示

晶体空间群 G_s 的一般群元可以 $\{R_i|\vec{n}\}$ 代表。R_i 是晶体的有限个点群对称操作，而 $\vec{n}$ 是晶格平移矢量，按照方程(3.6.1)和(3.6.7)，

$$\{R_i|\vec{n}\} = P(\vec{n})R_i \tag{3.6.24}$$

虽然 $P(\vec{n})$ 和 R_i 并不对易，但依据(3.6.4)式有

$$R_jP(\vec{n}) = \{R_j|0\}\{E|\vec{n}\} = \{R_j|R_j\vec{n}\} = P(R_j\vec{n})R_j$$

上式又可写为

$$P(\vec{n})R_j = R_jP(R_j^{-1}\vec{n}) \tag{3.6.25}$$

设 T 是空间群 G_s 的一个表示，则由(3.6.24)和(3.6.25)式分别给出其相应的群算符关系

$$T(R_i|\vec{n})=T_{(\vec{n})}T(R_i) \tag{3.6.26a}$$

$$T(\vec{n})T(R_i)=T(R_i)T(R_i^{-1}\vec{n}) \tag{3.6.26b}$$

在位矢 $\vec{r}$ 的函数空间中，依照方程(2.1.6)，这些群算符对函数 $\Phi(\vec{r})$ 作用为

$$T(R_i|\vec{n})\Phi(\vec{r})=\Phi(\{R_i|\vec{n}\}^{-1}\vec{r})=\Phi(R_i^{-1}\vec{r}-R_i^{-1}\vec{n})$$

不难证明，纯平移群 G_T 是 G_S 的不变子群，而 G_T 只存在(3.6.19)式给出的1维不可约表示。设 $\Psi_{\vec{k}}$ 是 G_T 的不可约表示 $T^{(\vec{k})}_{(\vec{n})}$ 的基矢，则有

$$T(E|\vec{n})\Psi_{\vec{k}}=T^{(\vec{k})}_{(\vec{n})}\Psi_{\vec{k}}=\exp(-i\vec{k}\cdot\vec{n})\Psi_{\vec{k}} \tag{3.6.27}$$

因为 $(\vec{k}\cdot\vec{n})=(R_i\vec{k}\cdot R_i\vec{n})$，$R_i\in G_P$，则

$$\begin{aligned}\Psi'_{\vec{k}}&=T(R_i|\vec{n})\Psi_{\vec{k}}=T(\vec{n})T(R_i)\Psi_{\vec{k}}=T(R_i)T(R_i^{-1}\vec{n})\Psi_{\vec{k}}\\&=\exp(-i\vec{k}\cdot R_i^{-1}\vec{n})T(R_i)\Psi_{\vec{k}}=\exp(-iR_i\vec{k}\cdot\vec{n})T(R_i)\Psi_{\vec{k}}\end{aligned} \tag{3.6.28}$$

现在考虑纯平移群算符 $T(E|\vec{m})$ 对新基矢 $\Psi'_{\vec{k}}$ 作用。

$$\begin{aligned}T(E|\vec{m})\Psi'_{\vec{k}}&=T(E|\vec{m})[T(R_i|\vec{n})\Psi_{\vec{k}}]=T(Ri|\vec{m}+\vec{n})\Psi_{\vec{k}}\\&=\exp[-iR_i\vec{k}\cdot(\vec{n}+\vec{m})]T(R_i)\Psi_{\vec{k}}=\exp(-iR_i\vec{k}\cdot\vec{m})\\&\cdot[T(R_i)|\vec{n}]\Psi_{\vec{k}}=\exp(-iR_i\vec{k}\cdot\vec{m})\Psi'_{\vec{k}}\end{aligned} \tag{3.6.29}$$

此式表明新基矢 $\Psi'_{\vec{k}}$ 是按平移群的不可约表示 $T^{(R_i\vec{k})}$ 变换。

以下将根据前面结果来讨论空间群的不可约表示及标记方式。设 L 为 G_S 的某个不可约表示空间，而 G_T 是 G_S 的不变子群，若 $\Psi_{\vec{k}}$ 是 G_T 的不可约表示 $T^{(\vec{k})}$ 的基矢，让 G_S 的全部群算符 $T(R_i|\vec{n})$ 对 $\Psi_{\vec{k}}$ 作用，则会得到与其相关的一组新基矢。这里首先要弄清两种不同类型的矢量：$\vec{k}$ 是 b_j 构成的倒易空间中的普通三维矢量，

G_S 的群元对它作用类似于(3.6.1)式变换；而 $\Psi_{\vec{k}}$是表示空间 L 中的基矢，(3.2,28)式给出 G_t 的群算符对它作用。为方便起见，先假定矢量 $\vec{k}$相对于晶体点群 $G_P=\{R_i\}$没有任何对称性，这意味着 $R_i\vec{k}$皆不相同。若令$\vec{k_i}=R_i\vec{k}$，只要 $R_i\neq R_j$，则必然$\vec{k_i}\neq\vec{k_j}$，否则必存在某个非单位元素 $R_j^{-1}R_i\in G_P$，满足 $R_j^{-1}R_i\vec{k}=\vec{k}$，从而使 $\vec{k}$具有某种对称性。通常称矢量集合$\{\vec{k_i}\}$为 $\vec{k}$的"星"。按照方程(3.2.29)，当 R_i 跑过群 G_P 时，L 空间中的基矢集合$\{\Psi_{\vec{k_i}}=T(R_i)\Psi_{\vec{k}}\}$各自属于 G_T 的不同不可约表示 $T^{(\vec{k_i})}$，即这些 $\Psi_{\vec{k_i}}$是线性无关的。

为了说明集合$\{\Psi_{\vec{k_i}}\}$正是 G_S 的某个不可约表示的一组基矢，即它们张开不可约表示空间 L，可让所有的 G_S 群算符对 $\Psi_{\vec{k_i}}$作用

$$T(R_j|\vec{m})\Psi_{\vec{k_i}}=T(R_j|\vec{m})T(R_i)\Psi_{\vec{k}}=T(R_jR_i|\vec{m})\Psi_{\vec{k}}$$

如果 $R_jR_i=R_l$，则由方程(3.6.28)得

$$T(R_j|\vec{m})\Psi_{\vec{k_i}}=\exp(-iR_l\vec{k}\cdot\vec{m})T(Rl)\Psi_{\vec{k}}=\exp(-i\,\vec{k_l}\cdot\vec{m})\Psi_{\vec{k}} \tag{3.6.30}$$

这里$\vec{k_l}=R_l\vec{k}=R_j\,\vec{k_i}=R_jR_i\vec{k}$，而 $\Psi_{k_l}\in L$，故 L 是 G_S 的一个不变子空间。此式给出了群 G_S 的任一元素$\{R_j|\vec{m}\}$相应表示的矩阵元。显然该表示的维数正是点群 G_P 的阶数 g。通常以 $\Gamma^{(\vec{k})}$来标记 G_S 的这个不可约表示。自然对于 $\vec{k}$星中的任一矢量$\vec{k_i}$，表示 $\Gamma^{(\vec{k})}$和 $\Gamma^{(\vec{k_i})}$ 都是等价的。同时，对于任意的倒格矢 $\vec{K}_m$，表示 $\Gamma^{(\vec{k})}$ 和 $\Gamma^{(\vec{k}+\vec{K}_m)}$也是等价的。

如果 $\vec{k}$相对于 G_P 具有一定对称性(例如 $\vec{k}$在某个反射面内或 n 重轴上)，则 G_P 中有些群元 R_i 将使 $\vec{k}$不变，显然保持 $R_i\vec{k}=\vec{k}+\vec{K}_m$的那些群元集合将构成 G_P 的一个子群 G_L，通常称 G_L 为矢量 $\vec{k}$ 的"小群"。设 G_L 为 g_l 阶群，根据 § 1.3 定理二可知，G_P 的任一群元 R_i 必在 G_L 的某个左陪集 H_mG_L 中，其中 $H_m\in G_L$，$H_mG_L\vec{k}$

$=H_m\vec{k}=\vec{k}_m$，故有 g_l 个不同 G_p 的元素同时使 $\vec{k}$ 变为某个 $\vec{k}_m$。因此，具有一定对称性的 $\vec{k}$ 星将只包含 g/g_l 个矢量。这时，与 g_p 群元相应的 g 个函数 $\Psi_{\vec{k}_i}=T(R_i)\Psi_{\vec{k}}$ 不再是线性无关的，空间群 G_S 的不可约表示将变得更为复杂。对于晶体而言，$\vec{k}$ 的小群 G_L 自然是 32 个晶体点群之一，可能存在的不可约表示已在表 3.8 中列出。若 L 是 G_S 给定的不可约表示空间，而 $D^{(\alpha)}$ 是 $\vec{k}$ 之小群 G_L 的 $f^{(\alpha)}$ 维不可约表示，由于 $R_i\vec{k}=\vec{k}(R_i\in G_L)$，则相应的 $f^{(\alpha)}$ 个基矢 $\Psi^{(\alpha)}_{\kappa u}(u=1,2,\cdots,f^{(\alpha)})$ 将是 G_L 不变的，它们将构成 L 的一个子空间 L'，这 $f^{(\alpha)}$ 个线性独立的 $\{\Psi^{(\alpha)}_{\kappa u}\}$ 不仅是 G_L 的不可约表示的基矢，而且对平移群 G_T 而言，它具有表示 $T^{(\vec{k})}$ 的变换性质。对于 $\vec{k}$ 星的每个矢量 $\vec{k}_m=H_m\vec{k}$，都对应存在 $f^{(\alpha)}$ 个新基矢 $\{\Psi^{(\alpha)}_{\kappa_m u}\}$，它们构成 G_L 的一个 $f^{(\alpha)}$ 维不变子空间，而 $\vec{k}$ 星中共包含 g/g_L 个不同的矢量 $\vec{k}_m$，故空间群 G_S 的这个不可约表示可用 $\Gamma^{(\alpha\vec{k})}$ 代表，其表示空间 L 为 $f^{(\alpha)}\cdot g/g_l$ 维。

为了得到类似方程(3.6.30)的表示矩阵元，首先可将 G_P 的任一元素 R_i 写成 G_L 的某个左陪集的元素，即 $R_i=H_m g_a, g_a\in G_L$。因为 $H_m\vec{k}=\vec{K}_m$，对于 G_L 的某个不可约表示 $D^{(\alpha)}$ 的一组基矢 $\{\Psi^{(\alpha)}_{\kappa u}\}$，定义一组新基矢

$$\Psi^{(\alpha)}_{\kappa_m u}=T(H_m)\,\Psi^{(\alpha)}_{\kappa u}(u=1,2,\cdots\cdots,f^{(\alpha)})$$

则对应 G_S 的任一元素 $\{Ri|\vec{n}\}$，都有

$$T(R_i|\vec{n})\Psi^{(\alpha)}_{\kappa_m u}=T_{(\vec{n})}T(R_i)T(H_m)\Psi^{(\alpha)}_{\kappa u}=T_{(\vec{n})}T(H_l)T(g_b)\Psi^{(\alpha)}_{\kappa u}$$
$$=T_{(\vec{n})}\sum_v D^{(\alpha)}_{vu}(g_b)T(H_l)\Psi^{(\alpha)}_{\kappa u}=T_{(\vec{n})}\sum_v D^{(\alpha)}_{vu}(g_b)\Psi^{(\alpha)}_{\kappa_e u}=\exp(-$$
$$i\,\vec{k}_e\cdot\vec{n})\sum_v D^{(\alpha)}_{vu}(g_b)\Psi^{(\alpha)}_{\kappa_e u} \qquad 3.6.31)$$

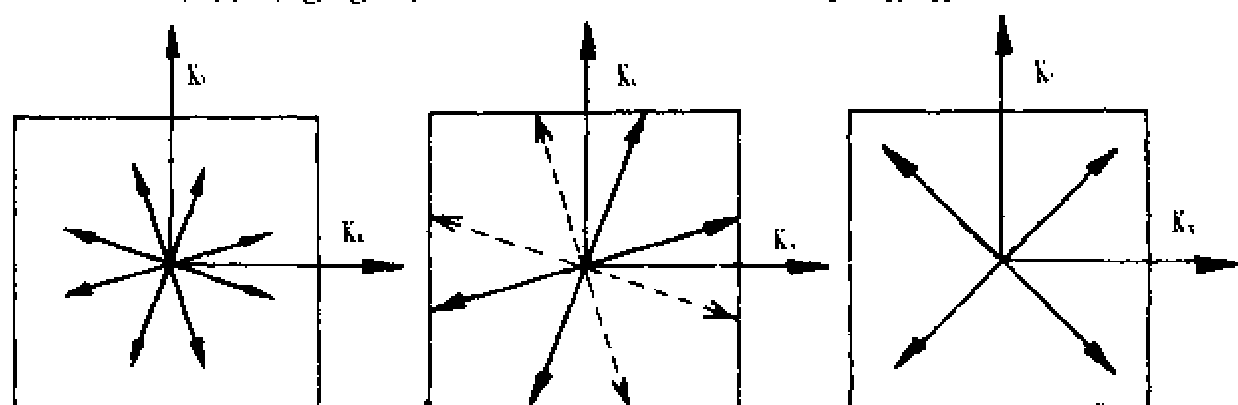
上式将给出 G_S 某个不可约表示矩阵元。由于 $R_j\cdot H_m\in G_P$，

故上式推导中利用了 $R_j H_m = H_l g_b$，$g_b \in G_L$，$H_l \in G_P$，矢量 $k_{\bar{l}} = H_l \vec{k} = H_l g_l \vec{k} = R_j H_m \vec{k}$，$D^{(\alpha)}_{vu}(g_b)$ 是 g_b 的 $f^{(\alpha)}$ 维不可约表示 $D^{(\alpha)}$ 的矩阵元，在这个 $f^{(\alpha)} \cdot g/g_l$ 维表示中，每隔 $f^{(\alpha)}$ 行就有一个 $f^{(\alpha)}$ 维小方阵是非零的，这个小方阵的位置决定于 G_P 的结构，即 $R_j \cdot H_m$ 对应的 H_l，这 $f^{(\alpha)}$ 行中的其它矩阵元皆为零。显然 G_L 有多少个不等价不可约表示，则 G_S 就有相应的多少种不可约表示。

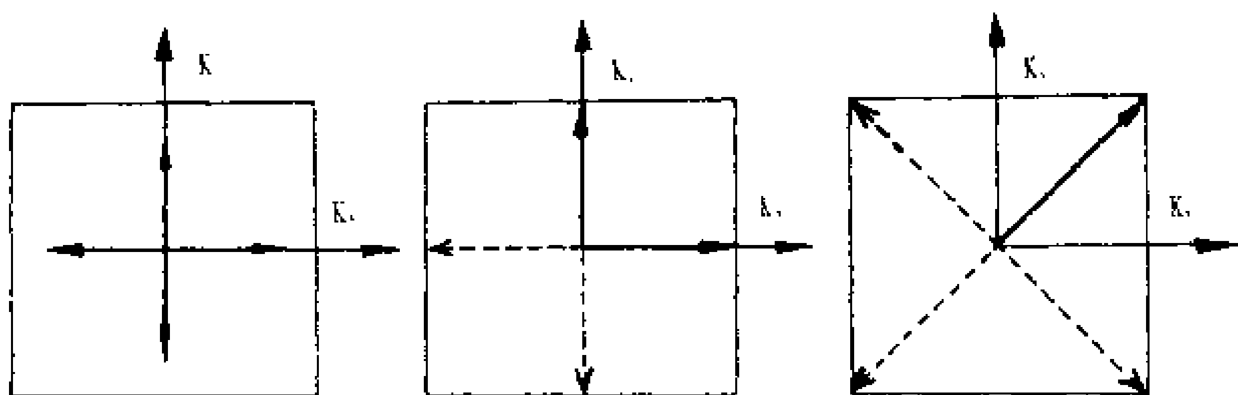
现在讨论矢量 $\vec{k}$ 的对称性。设 $G_L = \{g_a\}$ 是 g_l 维 $\vec{k}$ 的小群，它是 G_P 的子群。它们满足

$$g_a \vec{k} = \vec{k} + \vec{K}_m (g_a \in G_L) \quad (3.6.32)$$

G_P 中将有 g/g_l 个群元对 $\vec{k}$ 作用而得到 $q = g/g_l$ 个新矢量，它



(a)K：$q=8$　　(b)Z：$q=4$　　(c)Σ：$q=4$



(d)Δ：$q=4$　　(e)X：$q=2$　　(f)M：$q=1$

图 3.14　平面正方晶格各种 $\vec{k}$ 的星。

们构成 $\vec{k}$ 的"星"，图 3.14 给出具有点群 C_{4v} 对称性的二维正方晶格各种 $\vec{k}$ 矢量的星。其布里渊区是边长为 $\frac{2\pi}{a}$ 的正方形。

图 3.14 中的每个虚线矢量可借助于倒格矢等价实线 $\vec{k}$ 矢量，q 代表星内不同矢量数。

图 3.15 给出简单立方晶格中各种 $\vec{k}$ 矢量的标准固体物理标记符号。其布里渊区是边长为 $2\pi/a$ 的立方体，它具有点群 O_h 对称性。对于一般 $\vec{k}$，它没有任何对称性，故其星应包含 48 个矢量 $\vec{k}_i = R_i\vec{k}$。符号△代表沿 kx 轴上一般点，此类 $\vec{k}$ 矢量具有点群 C_{4v} 对称性，故△的小群是有 8 个群元的 C_{4v}，而△的星将包含 6 个不同的矢量 $\vec{k}_m$。以 X 代表 $k_x = \frac{\pi}{a}$ 的点，它除了点群 C_{4v} 对称性外，还有与 $k'_x = -\frac{\pi}{a}$ 等价的对称性（因 k_x 与 k'_x 相差倒格矢 $\frac{2\pi}{a}$）。故 X 具有与 kx 轴垂直的平面反射对称性，它的小群是 16 个群元的 D_{4h}，所以 X 的星只有三个点。立方体心 Γ 的小群就是正方体完全对称群 O_h。正立方体每边中点以 M 代表，显然在 k_xk_y 平面内的四个顶点是等价的，故 M 的小群也是 16 个群元的 D_{4h}，它的星只包含 M，M_2 和 M_3 三个点。以 Σ 代表 ΓM 直线上任一点，显然它的小群是 4 个群元的 C_{2v}，故 Σ 的星有 12 个点。

以上简略地介绍了求空间群不可约表示的方法，但对晶体空间群而言，有时纯转动 $\{R_i|0\}$ 并不一定是空间群的元素。如果所有纯转动都是 G_S 的元素，则称这样的空间群为同型群；否则为非同型群。全部空间群共有 73 个同型群和 157 个非同型群，显然，只有 G_S 中所有平移矢量都是晶格平移矢量时，这样的空间群才可能是同型群，它不存在螺旋轴或滑移面等对称操作。上述求空间群不可约表示的方法只适用于同型群晶体的布里渊区内和区面上的所有 $\vec{k}$ 矢量以及非同型群晶体的布里渊区内的 $\vec{k}$ 矢量，而对非同型群晶

体的布里渊区面上的 $\vec{k}$ 矢量，G_S 的一般群元 $\{R_i|\vec{\tau}\}$ 的表示矩阵还未有普遍适用的方法，当然可利用某些非同型群的特殊性质去求其表示矩阵，但往往比较复杂，这里就不再讨论了。

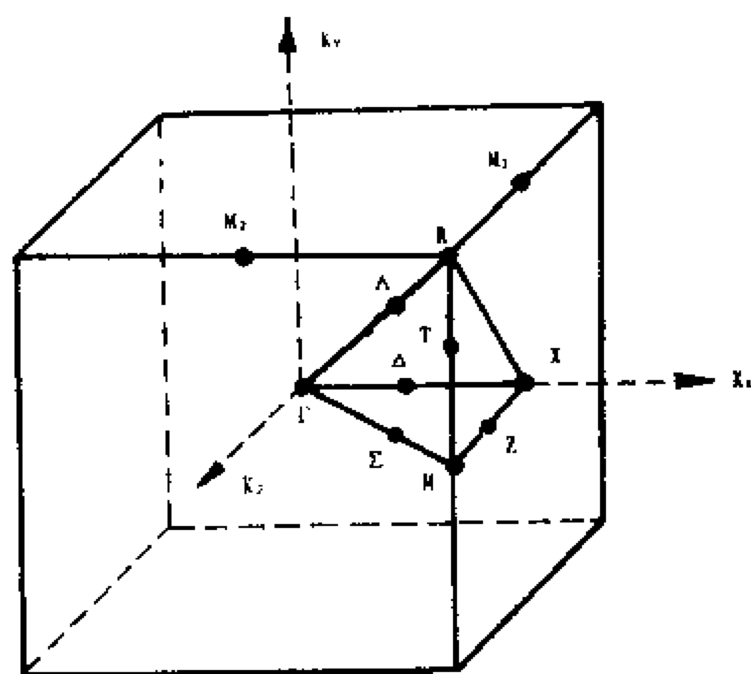


图 3.15　立方晶格的各种 $\vec{k}$ 矢量的标准符号

§3.7　点群的初步应用

在物理规律的探索中，对称性研究起着重要作用，特别在近代物理中，它们已成为表述物理规律的支柱，例如，在用自由电子近似方法计算固体能带时，利用群论方法将平面波组成对称化的线性组合，可使计算大为简化。此外，群论在发光光谱学中也得到广泛应用，它对了解能级简并性，波函数的对称性及离子能级在外场中的分裂等提供了方便，下面仅就哈密顿群，能级简并与分裂、跃迁矩阵元相应的选择定则等进行简单描述。

7—1 哈密顿对称群及守恒量

第二章开头曾讨论了群表示与体系对称性之间的关系。如果我们研究一个原子系统，其哈密顿 H 通常是时间、动量、角动量和空间坐标等的函数，它的具体形式应该反映系统所具有的对称性。例如，在单粒子近似下，其哈量是 $H=-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}+V$

第一项是动量算符，它在坐标的正交变换下不变，因此 H 的对称性仅决定于势能函数 V 的对称性，氢原子中电子的势能是中心对称的，所以 H 具有空间旋转对称性；若考虑晶体中的电子运动，其势能则具有该晶体的点群对称性。设系统的定态薛定锷方程为

$$H\Psi=E\Psi$$

当坐标变换群 $G=\{g_a\}$ 使坐标矢量 $\vec{r}\to\vec{r}'=g_a\vec{r}$，则相应函数 $\Psi(\vec{r})\to\Psi'(\vec{r})=u_a\Psi(\vec{r})=\Psi(g_a^{-1}\vec{r})$，而集合 $\{u_a\}$ 构成的导出变换群 G 是同构于 $G=\{g_a\}$。让 u_a 作用上式方程两边。

$$u_aH\Psi=Eu_a\Psi$$

上式可写为

$$(u_aHu_a^{-1})(u_a\Psi)=E(u_a\Psi),$$

令 $H'=u_aHu_a^{-1}$，H' 为 H 的变换标符。则有

$$H'u_a\Psi=Eu_a\Psi$$

若相对于变换群 $G=\{u_a\}$，H 是不变的，即 $H'=H$，$u_a\in G$，则有 $[H,u_a]=0$，一切使 H 不变的对称性操作（变换）将构成一个群，称此群为哈密顿对称群或薛定锷方程群。

例 1　考虑一个有 n 个电子的原子，其哈量可写为

$$H(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots)=-\sum_i\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_i^2-\sum_i\frac{Ze^2}{r_i}+\frac{1}{2}\sum_i\sum_{j\neq i}\frac{e^2}{r_{ij}}$$

式中 $\vec{r}_i$ 为第 i 个电子的矢径，r_{ij} 是矢径为 $\vec{r}_i$ 及 $\vec{r}_j$ 的两电子间距离，上

式第一项为电子动能，后二项分别为电子与荷电 Ze 的原子核之间及电子之间的库仑势能，如果 $u_a \in G$，而 G 为绕原点旋转构成的导出变换群。显然，∇_i^2、r_i 和 r_{ij} 都是旋转不变的，故该原子系统的哈密顿对称群是三维正交变换群 $SO(3)$。

例 2　如有三个质子位于正三角形的三个顶点上，则在此势场中运动的电子哈量可写为

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} - \frac{e^2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|} - \frac{e^2}{|\vec{r}-\vec{r}_3|}$$

这里 $\vec{r}$ 是电子的位矢，$\vec{r}_1$，$\vec{r}_2$，$\vec{r}_3$ 是三个质子的位矢，不难看出，上式中的下标 1，2，3 任意交换，其哈量不变，故该体系的哈密顿群为置换群 S_3。

在量子力学中，力学量算符在状态 Ψ_m 的平均值定义为

$$\langle F \rangle = \int d^3\vec{r}\,\Psi_m^*(\vec{r})\hat{F}\Psi_m(\vec{r}) = \langle \Psi_m | \hat{F} | \Psi_m \rangle$$

因为力学量算符的平均值可被测量，故 $\langle F \rangle$ 必定是实数，其相应算符必为厄米算符，从状态 Ψ_m 跃迁到 Ψ_n 的几率幅为 $\langle \Psi_n | \Psi_m \rangle = \int d^3\vec{r}\,\Psi_n^*(\vec{r})\Psi_m(\vec{r})$

由于跃迁几率守恒的要求，则有

$$|\langle u_a\Psi_n | u_a\Psi_m \rangle|^2 = |\langle \Psi_n | \Psi_m \rangle|^2, u_a \in G$$

因此

$$\langle u_a\Psi_n | u_a\Psi_m \rangle = e^{i\varphi(u_a)} \cdot \begin{cases} \langle \Psi_n | \Psi_m \rangle \\ \langle \Psi_m | \Psi_n \rangle \end{cases} \tag{3.7.1}$$

若不考虑相因子，则要求导出变换群算符必须是幺正的或反幺正的，而两个反幺正算符之积仍为幺正的，故纯反幺正变换无法构成群，且反幺正变换群没有确定的守恒量，今后只限于研讨量子力学中的幺正变换群及其相应的幺正表示，由幺正变换性

$$\langle u_a\Psi_n | u_a\Psi_m \rangle = \langle \Psi_n | u_a^+ u_a | \Psi_m \rangle = \langle \Psi_n | \Psi_m \rangle$$

可推知 $u_a^+ u_a = I$，从而有

$$u_a = e^{i\sum_k a_k \tau_k}$$

a_k 为无穷小实参数，由其么正性可知 $\tau_k^+ = \tau_k$，即 τ_k 为厄米算符，它可代表某种力学量算符，设 $G = \{u_a\}$ 为体系的哈密顿群，则由 $[H, u_a] = 0$，可推得 $[H, \tau_k] = 0$，若算符 τ_k 不显含时间 t，利用薛定锷方程，则 τ_k 所代表的力学算符平均值的时间变化率为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \Psi, \tau_k \Psi \rangle = \langle \Psi, \dot{\tau}_k \Psi \rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle \Psi, [\tau_k, H] \Psi \rangle = 0$$

因此，相应于系统具有某种么正哈密顿对称群，必然存在某种对应的守恒量。

物理学中的对称性可分为几何对称性和动力学对称性两大类。前者描述物理现象的时空变换性质，诸如空间和时间平移，空间转动或镜象反射，以及时空反演等；后者描述体系内部与时空无关系的其它动力学性质，诸如核力的电荷无关性的 $SU(2)$ 同位旋对称性和描述强子结构和分类的 $SU(3)_f$ 对称性和 $SU(3)_c$ 量子色动力学对称性等。

7－2　能级简并和分裂

为了形象地描述体系的对称性与能级简并的关系，在图 2.1 中曾讨论了三个质量为 m 的平行六面体在重力场中所具有的势能 $V = mgh$，其中 h 为物体质心离地面的高度，每类六面体有六种稳定放置方式，显然 Ⅰ 类的 6 个势能可分为三组，Ⅱ 类有二组，最低能级为 4 重简并的，而 Ⅲ 类是个正方体，它只有一个能级，它为 6 重简并的，显然物体的对称性越高，其能级简并度也愈高。

在量子力学中，系统状态以波函数来描述，设 Ψ_1 是哈密顿 H 的本征值为 E 的本征函数，则由哈密顿群的每个元素 $u_a \in G$ 对 Ψ_1 作用，从中选出线性独立的本征函数系 $\Psi_1, \Psi_2, \cdots\cdots \Psi_n$，若群 G 为 g 阶，显然 $n \leqslant g$，它们都是 H 的本征值为 E 的本征函数，它们将

形成群 G 的一个表示的基函数，它可能是可约或不可约表示，然而，若 G 包含使 H 不变的一切变换，一般说来，这组简并的本征函数将是该群不可约表示的基函数，这就是因系统具有对称性而导致的退化现象。是否按群的不等价不可约表示变换的任意两个本征函数一定有不同的本征值呢？一般讲是肯定的，因为属于群 G 不等价表示的两个基函数，是不能通过对称操作 u_a 将其两者连结起来。只有在很稀少情况下才会出现这种偶然简并现象，它是无法由群论来推断的。来自系统对称性的退化称之基本退化，它可通过施加一较低对称的“微扰”来消除，群表示论是研究该类简并的有力工具；而偶然退化的出现位置会随某种参数而改变，但这种参数对基本退化没有影响。例如，我们取一个具有两能级的费米子系统，其 A 和 B 两能级都是由自旋引起的二重退化。若在 Z 轴方向加一磁场 $\vec{B}$，则 A 和 B 两能级将分别分裂为 A_1 和 A_2、B_1 和 B_2 两个能级，如图 3.16 所示，随着磁场不断增强，就会出现 A_2 和 B_1 重合的偶然退化现象，无磁场时的 A 和 B 二重简并是由系统本身对称性决定的，在 $\vec{B}=0$ 时，自旋向上或向下不能区分，即上下对称引起二重简并，而 P 点的退化只对应磁场的特殊值 $\vec{B}_P$，它将随着费米子电荷及质量改变而不同（这种电磁场引起的能量改变大小为 $\mu_B\vec{s}\cdot\vec{B}$，玻尔磁子 $\mu_B=\frac{e\hbar}{2mc}$）。

从以上讨论可得到以下结论：

1° 哈量 H 的本征函数和本征值可用相应哈密顿群 G 的不可约表示来标记，对应 G 的一个不可约表示 $D^{(\mu)}$，就有相应的能级 E_μ 和本征函数 $\Psi_i^{(\mu)}(i=1,2,\cdots n_\mu)$；

2° E_μ 的简并度取决于该不可约表示的维数 n_μ；

3° 由于 1 维表示只有一个基函数 Ψ，而哈量 H 为厄米算符，故 Ψ^* 也是 H 有相同本征值的本征函数，因此二个互为复数共扼的不等价的 1 维表示，也将对应能级的二重简并，通常以字母 E

来代表二重简并能级，对称群的每个不可约表示通常对应于光谱学中的一个特定谱线标记，字母 A 或 B 通常代表 1 维表示，E 和 F 分别代表 2 维和 3 维不可约表示。例如，具有 T 群对称的晶体，由其特征标表可看出，只有恒等表示对应的能级 A 是非简并的，其第二和第三个不可约表示形成复共轭的二重简并能级 E，第四个不可约表示相应三重简并能级 F。

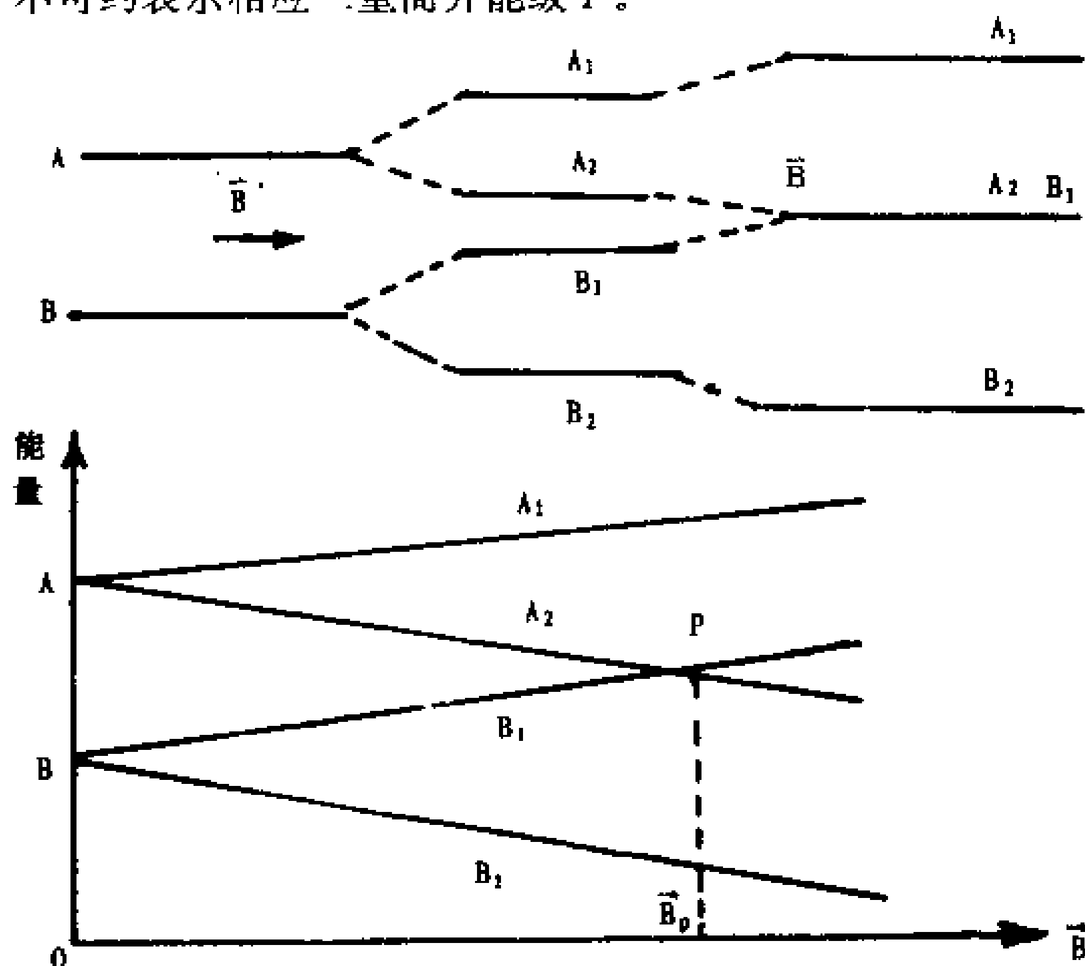


图 3-16 A 和 B 两能级是二重基本简并，而 P 点处出现的二重简并是偶然简并

设系统未加微扰时的哈量为 H_0，其相应的哈密顿群为 G，因它具有较高对称性，故出现能级简并，假如对此系统加一微扰 H'，则哈量 $H=H_0+H'$。这可能有两种情况：(a)若 H' 与 H_0 具有相同的对称性，我们可证明，这种微扰无法消除简并，设 $E_\mu^{(0)}$ 能级相应于 H_0 对称群的 $D^{(\mu)}$ 不可约表示，表示维数为 n_μ，则有

$$H_0\Psi_i^{(\mu)}=E_\mu^{(0)}\Psi_i^{(\mu)},(i=1,2,\ldots n_\mu)$$

合理选取$\{\Psi_i^{(\mu)}\}$为一组线性独立正交归一的本征函数，则 H_0 的矩阵为常数矩阵，即

$$\langle H_0\rangle_{ij}=\langle\Psi_i^{(\mu)}|H_0|\Psi_i^{(\mu)}\rangle=E_\mu^{(0)}\delta_{ij}$$

由 $H=H_0+H'$，可推得

$$H\Psi_j^{(\mu)}=E_\mu^{(0)}\Psi_i^{(\mu)}+\Psi_j^{(\mu)}$$

$$\langle\Psi_i^{(\mu)}|H_0|\Psi_i^{(\mu)}\rangle=E_\mu^{(0)}\delta_{ij}+\langle\Psi_i^{(\mu)}|H'|\Psi_i^{(\mu)}\rangle$$

由上式可看出，要使原能级 $E_\mu^{(0)}$ 发生分裂，可有两种情况，一是 H 的非对角元素不为零，即要求 H'的非对角元不为零；二是虽然 H'非对角元素全为零，但对角元素$\langle H'\rangle_{ij}$与角标 i 有关。下面让我们证明，只要 H'与 H_0 有相同的对称性，则以上两种情况皆不可能。

设 $\Psi_i^{(\mu)}$ 和 $\Phi_j^{(\nu)}$ 分别为群 G 的不可约表示 $D^{(\mu)}$的第 i 个基函数和 $D^{(\nu)}$不可约表示的第 j 个基函数，由于么正哈密顿群的基函数内积不变，即$\langle\Psi_i^{(\mu)},\Phi_j^{(\nu)}\rangle=\langle u_a\Psi_i^{(\mu)},u_a\Phi_j^{(\nu)}\rangle=\frac{1}{g}\sum_{a=1}^{g}\langle u_a\Psi_i^{(\mu)},u_a\Phi_j^{(\nu)}\rangle$

$$=\frac{1}{g}\sum_a\sum_{k,e}\langle D_{ki}^{(\mu)}(g_a)\Psi_k^{(\mu)},D_{ej}^{(\nu)}(g_a)\Psi_e^{(\nu)}\rangle=\frac{1}{g}\sum_{k,l}\langle\Psi_k^{(\mu)},\Psi_e^{(\nu)}\rangle$$

$$\frac{g}{n_\mu}\delta_{\mu\nu}\delta_{ke}\delta_{ij}=\frac{1}{n_\mu}\sum_k\langle\Psi_k^{(\mu)},\Phi_k^{(\nu)}\rangle\delta_{\mu\nu}\delta_{ij}\tag{3.7.2}$$

显然，属于不同的不可约表示的两本征函数内积为零，即使是同一个不可约表示的两个不同分量的基函数，其内积也为零，由于 H' 与 H_0 具有相同对称性，若令 $\Phi_i^{(\nu)}=H'\Psi_i^{(\nu)}$，因 $u_aH'u_a^{-1}=H'$，$(u_a\in G)$，则

$$u_a\Phi_i^{(\nu)}=u_aH'u_a^{-1}u_a\Psi_i^{(\nu)}=H'\sum_k D_{ki}^{(\nu)}(g_a)\Psi_k^{(\nu)}=\sum_k D_{ki}^{(\nu)}(g_a)$$

$$(H'\Psi_k^{(\nu)})=\sum_k D_{ki}^{(\nu)}(g_a)\Phi_k^{(\nu)}$$

可见 $\Phi_i^{(\nu)}=H'\Psi_i^{(\nu)}$ 也是按此群的不可约表示 $D^{(\nu)}$变换，故 H' 的矩阵元，按(3.7.1)式可看出不仅在 $\mu\neq\nu$ 时$\langle\Psi_i^{(\mu)},H'\Psi_j^{(\nu)}\rangle=0$，

既使在 $\mu=\nu$ 时，若 $i\neq j$ 时，其非对角元素 $H'_{ij}=0(i\neq j)$，而在 $\mu=\nu, i=j$ 时，其内积为

$$\langle\Psi_i^{(\mu)},\Phi_i^{(\nu)}\rangle=\frac{1}{n_\mu}\sum_{k=1}^{n_\mu}\langle\Psi_k^{(\mu)},\Phi_k^{(\nu)}\rangle=\langle\Psi_k^{(\mu)},\Phi_k^{(\nu)}\rangle\text{，即}$$

$$\langle\Psi_i^{(\mu)},H'\Phi_i^{(\nu)}\rangle=\langle\Psi_k^{(\mu)},H'\Psi_k^{(\nu)}\rangle\text{（不对 } i \text{ 和 } k \text{ 求和），}$$

可见 H' 的对角元素与指标 i 无关，故这种微扰无法消除简并。

(*b*)若 H' 比 H_0 具有较低对称性，则总哈密顿群将仅是 H' 所具有的对称变换群 G'，G' 为 G 的一个子群，对应 G 的一个不可约表示，也相应为 G' 群的一个表示，通常为 G' 的可约表示。可利用特征标方法进行约化，相应于 G 群的一个不可约表示（对应某简并能级 E_μ），可约化为 G' 群的若干不可约表示的直和，其每个表示对应于一个能级，从而使简并能级 E_μ 分裂为几个新能级，使之简并消除或部分消除。

例 1　设某系统加微扰前具有点群 C_{3v} 对称性，由 C_{3v} 群的特征标表可知，该系统能谱可按 A_1，A_2 和 E 来分类，而 E 能级为二重简并，若对此系统加上具有点群 $C_{1v}=C_S$ 的微扰，则 E 能级将分裂，而使简并消除，下面重新给出点群 C_{3v} 和 C_S 的特征标表，由元素对应关系不难看出，C_{3v} 群的二重简并 E 能级对应 C_S 的一个可约表示，利用(2.5.8)式，不难求得对应 C_S 的两个不可约表示 A' 和 A''。

C_{3v}	e;	C_3,C_3^2;	$3\sigma_v$	C_S	e;	σ_v
A_1	1	1	1	A'	1	1
A_2	1	1	-1	A''	1	−1
E	2	-1	0	E	2	0

$$a^{(A')}=\frac{1}{2}(1.2+1.0)=1;a^{(A'')}=\frac{1}{2}(1.2+(-1).0)=1$$

从而使简并能级 E 在 C_S 对称性微扰下分裂 A' 和 A'' 两个能

级，简并完全消除。如图 3.17 所示。

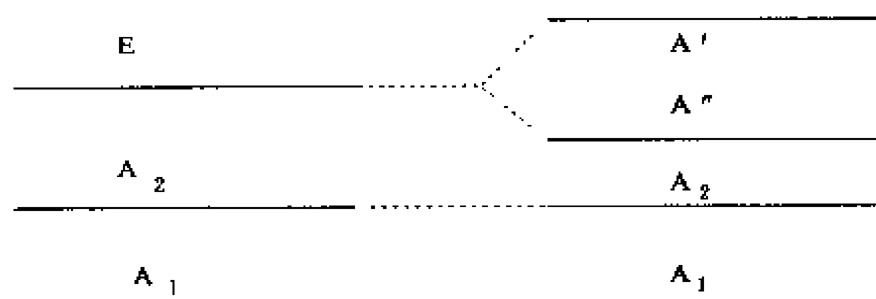


图 3.17 C_{3v}对称的二重简并能级在 C_S 型微扰下，简并完全消除

例 2 设系统加微扰前具有 T 群对称性，从特征标表可知 F 能级是三重简并的，若对此系统加一D_2 型对称微扰后，其三个相互垂直的 C_2 轴也是 T 群的元素，故 D_2 是 T 的一个子群，它仅有 1 维不可约表示，故 T 群的三维表示 F 将约化为 D_2 群的三个 1 维表示 B_1，B_2 和 B_3。其特征标表如下利用(2.5.8)式可求得 $a^{(A)}=0$，而 $a^{(B1)}=a^{(B2)}=a^{(B3)}=1$，故 T 对称系统的 F 能级在 D_2 对称型微扰下将分裂为 B_1，B_2 和 B_3 三个能级，从而消除简并。

T	e;	$3C_2$;	$4C_3$;	$4C_3^2$
$A, X^{(1)}$	1	1	1	1
$E\ X^{(2)}$	1	1	ϵ	ϵ^2
$E\ X^{(3)}$	1	1	ϵ^2	ϵ
$F, X^{(4)}$	3	-1	0	0

D_2	e;	$C_2^{(x)}$;	$C_2^{(y)}$;	$C_2^{(z)}$
$A, X^{(1)}$	1	1	1	1
$B_1X^{(2)}$	1	1	-1	-1
$B_2X^{(3)}$	1	-1	1	-1
$B_3X^{(4)}$	1	-1	-1	1
F	3	-1	-1	-1

若对该系统加一 C_3 群对称型微扰，其 F 能级对应于 C3 点群

的特征标如下表所示，从而求得 $a^{(A')}=\frac{1}{3}(3.1+0+0)=1$，

$$a^{(E)}=\frac{1}{3}(3.1+0+0)=1$$

C_3	e;	C_3;	C_3^2
A'	1	1	1
E'	1	ϵ	ϵ^2
	1	ϵ^2	ϵ
F	3	0	0

故 T 群的三重简并能级在 C_3 型对称群微扰下，只分裂为 A' 和 E' 两个能级，其中 E' 仍为二重简并，微扰并未完全消除简并，其能级图如 3.18 图所示。

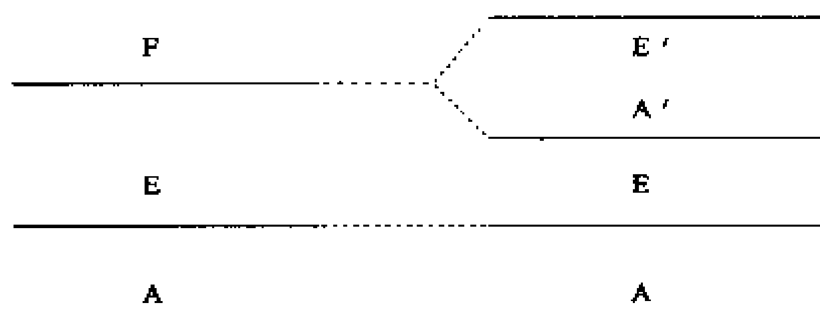


图 3.18　点群 T 对称的三重简并能级 F 在 C_3 型微扰下，部分消除简并

例 3　晶体场中角动量为 l 的能级分裂

在下面讨论 $SO(3)$ 群中即将看到，对于绕固定轴转 α 角的转动 $R(\alpha)$，可取球谐函数 Y_{lm} 做基矢（$m=l,l-1,\ldots,-l$），由此可得到一个 $2l+1$ 维不可约表示 D_l，在这组基矢下 $R(\alpha)$ 可写成下述对角矩阵形式：

$$R(\alpha)=\begin{bmatrix} e^{-il\alpha} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{-i(l-1)\alpha} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{il\alpha} \end{bmatrix}$$

其特征标为

$$X_l(\alpha)=\sum_{m=-l}^{l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\alpha}=\frac{\sin(l+1/2)\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} \tag{3.7.3}$$

现在以 O 群为例研讨一下旋转群不可约表示 D_l 和晶体点群不可约表示之间的约化关系，将 O 群的五类操作对应的转角 α 代入上式，则可得到 D_l 表示的相应特征标如下表所示：

O	E	$C_3(8)$	$C_4^2(3)$,	$C_2(6)$,	$C_4(6)$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1	-1
E	2	-1	2	0	0
F_1	3	0	-1	-1	1
F_2	3	0	-1	1	-1
$l=0$	1	1	1	1	1
$l=1$	3	0	-1	-1	1
$l=2$	5	-1	1	1	-1
$l=3$	7	1	-1	-1	-1
$l=4$	9	0	1	1	1
$l=5$	11	-1	-1	-1	1

两者对照不难看出：

$D_{l=0}$对应于 O 群的 A_1 表示；$D_{l=1}$对应于 O 群的 F_1 表示；而 $D_{l=2}$对应于 O 群表示 $E+F_2$；$D_{l=3}$对应于 $A_2+F_1+F_2$；$D_{l=4}$对应于 $A_1+E+F_1+F_2$；$D_{l=5}$对应于 $E+2F_1+F_2$。

由此可看到，一个给定轨道动量矩 l 的原子放在正方体对称晶体场中，其能级劈裂情况如下：

S 项($l=0$)对应 A_1 能级不劈裂

P 项($l=1$)对应 F_1 能级不劈裂

D 项$(l=2)$劈裂为 E 和 F_2 两个能级

F 项$(l=3)$劈裂为 A_2, F_1 和 F_2 三个能级

G 项$(l=4)$劈裂为 A_1, E, F_1 和 F_2 四个能级

H 项$(l=5)$劈裂为 $E, 2F_1$ 和 F_2 四个能级。

由于 T_d 群与 O 群同构，故在 T_d 群对称的晶体场中，其能级劈裂情况相同，但由于 T_d 群具有反射面对称性，因此，对于 l 为偶数的能级两者完全一样，而 l 为奇数的能级，应将上述 O 群对称性晶场中劈裂的 A_1 与 A_2 以及 F_1 与 F_2 对换。利用这种特征标法也可求得任意轨道动量矩 l 的原子在各种点群晶场中的能级劈裂。

7—3 矩阵元定理和选择定则

如果系统的哈量 $H=H_0+H'$，它在未加扰微 H' 前处在 H_0 的本征态 $\Psi_i^{(\mu)}$，当加上较低对称的微扰 H' 后，正如上节讨论的，不仅系统的能级要发生分裂，部分或全部消除简并，而且将引起该系统由一个 H_0 的本征态跃迁到另一个本征态。根据本征函数和 H' 具有的对称性，群论矩阵元定理将很快推知哪些跃迁是禁戒的，又哪些跃迁是允许的选择定则。在详细研讨之前，先证明一个基本定理。

(1) 基本定理

设 $\Psi_j^{(\mu)}$ 是群 G 的非平凡 $D^{(\mu)}$，不可约表示基函数的任意分量(第 j 分量)，则该函数的整个空间积分为零。即

$$\int \Psi_j^{(\mu)} \mathrm{d}\tau = 0 \quad (\mu \neq 1) \tag{3.7.4}$$

证明：由上节讨论已知，若 $\Psi_i^{(\mu)}$ 和 $\Phi_j^{(\nu)}$ 分别为群 G 的不可约酉表示 $D^{(\mu)}$的第 i 分量和 $D^{(\nu)}$的第 j 分量，则其内积为

$$\int \Psi_i^{*(\mu)} \Phi_j^{(\nu)} \mathrm{d}\tau = (\Psi_i^{(\mu)}, \Phi_j^{(\nu)}) = 0, \ (\mu \neq \nu \text{ 和 } i \neq j)$$

若取 $\nu=1$ 为群的恒等表示，则只要 $\mu \neq 1$(即非恒等表示)，就

有

$$\int \Psi_i^{(\mu)} d\tau = 0 (\mu \neq 1)。 \tag{3.7.5}$$

由此式出发，任意一个空间坐标函数皆可以群的不可约表示完备基函数展开，即

$$\Psi = \sum_{v=1}^{N} \sum_{j=1}^{n_v} C_j^{(v)} \Psi_j^{(v)}, 令\ \Psi'^{(1)} = C^{(1)} \Psi^{(1)}$$

则由基本定理推得

$$\int \Psi d\tau = \int \Psi'^{(1)} d\tau$$

而在群标符 u_a 作用之下又有

$$\begin{aligned}
\int u_a \Psi d\tau &= \sum_{v,j} C_j^{(v)} \int u_a \Psi_j^{(v)} d\tau \\
&= \sum_{v,j,j'} C_j^{(v)} \int D_{j'j}^{(v)}(u_a) \Psi_{j'}^{(v)} d\tau \\
&= \sum_{j,j'} C_j^{(1)} D_{j'j}^{(1)}(u_a) \int \Psi_{j'}^{(1)} d\tau \\
&= \int C^{(1)} \Psi^{(1)} d\tau = \frac{1}{g} \sum_{a=1}^{g} \int u_a \Psi d\tau
\end{aligned}$$

若 Ψ 为群的某可约表示的基函数，只要该表示不包含恒等表示，必有$\int \Psi d\tau = 0$。

(2) 矩阵元定理

设 $\Psi_j^{(v)}$ 是 H_0 对称群 G 的不可约表示 $D^{(v)}$的第 j 分量，现在来考查某算符 F 对本征函数 $\Psi_j^{(v)}$ 的作用，所生成的新函数 $F\Psi_j^{(v)}$ 必可以其完备集$\{\Psi_j^{(v)}\}(v=1,2,\cdots\cdots N; j=1,2,\cdots\cdots,n_v)$展开。

$$F\Psi_j^{(v)} = \sum_{v',j'} C(v,j;v',j') \Psi_{j'}^{(v')}$$

利用本征函数的正交归一性可得

$$C_{(v,j;v',j')} = (\Psi_{j'}^{(v')}, F\Psi_j^{(v)}) \tag{3.7.6}$$

如果力学量算符 F 的矩阵元 $C(v,j;v',j')=0$，则说明在 F 作用下，从态 $\Psi_j^{(v)}$ 到 $\Psi_{j'}^{(v')}$ 的跃迁是禁戒的，否则为允许跃迁，这就是选择定则，$F\Psi_j^{(v)}$ 不再是按群某个不可约表示变化的"纯"对称函数，而是若干个本征函数的线性组合，故得矩阵元定理：

如果生成函数 $F\Psi_j^{(v)}$ 不含有该群不可约表示 $D^{(v')}$ 的第 j' 分量，则跃迁矩阵元 $F_{j'j}^{v'v}=(\Psi_{j'}^{(v')},F\Psi_j^{(v)})=0$。

在量子力学中，通常 F 本身即为坐标的函数，因此可把 F 视为该群某个表示 D_F 的基函数，而 $F\Psi_j^{(v)}$ 可视为群的直积表示 $D_F\otimes D^{(v)}$的基函数，由第二章表示约化理论可知，只要这个直积表示不含有不可约表示 $D^{(v')}$，则 $D^{*(v')}\otimes D_F\otimes D^{(v)}$就不包含恒等表示，由基本定理推知，此跃迁矩阵元恒为零。显然这是个比上述矩阵元定理更弱的选择定则，因为它未涉及不可约表示的对应分量关系。但在群论的实际应用中，它比上述的矩阵元定理更为简单和实用。

最后，我们还必须指出，由于系统的对称性可方便地得到某些禁戒跃迁，但群论本身并不能给出不为零的矩阵元的其它信息；有些矩阵元从群论角度看它可以不为零，但这并不能排除由于其它原因或某种偶然性而恰好为零的可能性。

(3) 电偶极矩跃迁

设系统具有点群 C_{3v}对称性，而电偶极矩 $\vec{p}=q\vec{r}$与空间矢量 $\vec{r}$ 有相同的变换性质。若取 C_3 轴沿 Z 轴方向，从 C_{3v}群的特征标表不难看出，电偶极矩的 Z 分量属于点群 C_{3v}的 A_1 表示；而 $\vec{p}$的 x 和 y 分量将构成 C_{3v}的 E 表示，故 $p_z\Psi_j^{(v)}$应为该群直积表示 $A_1\otimes D^{(v)}$的基函数，$p_x\Psi_j^{(v)}$ 和 $p_y\Psi_j^{(v)}$ 将为直积表示 $E\otimes D^{(v)}$的基函数，除非 $A_1\otimes D^{(v)}$和 $E\otimes D^{(v)}$包含 不可约表示 $D^{(\mu)}$，否则矩阵元$(\Psi_i^{(\mu)},\vec{p}\Psi_j^{(v)})=0$，利用 C_{3v}群的特征标表不难约化这两个直积表示。因为

$$\begin{cases}A_1\otimes A_1=A_1\\E\otimes A_1=E\end{cases},\quad\begin{cases}A_1\otimes A_2=A_2\\E\otimes A_2=E\end{cases},\quad\begin{cases}A_1\otimes E=E\\E\otimes E=A_1\oplus A_2\oplus E\end{cases}$$

从以上三组约化结果不难看出，$A_1 \to A_1$ 或 E，$A_2 \to A_2$ 或 E，$E \to A_1, A_2$ 或 E 的电偶极矩跃迁是允许的，而 $A_1 \to A_2$ 或 $A_2 \to A_1$ 的跃迁将是被禁戒的。

（4） 磁偶极矩跃迁

粒子的磁矩与其自旋及该粒子在系统中的轨道运动有关。无自旋的原子核总磁矩为零，有自旋的原子核磁矩定义为 $\vec{\mu}=g\mu_N\vec{J}/\hbar$，$g$ 为原子核回转磁比率，μ_N 为波尔磁子，$\vec{J}$ 为原子核的角动量，可见磁矩是个轴矢量，若取矢径 $\vec{r}$ 和动量 $\vec{p}$ 为 xy 平面，则 $\vec{\mu}$ 在 Z 轴方向，其空间变换性质为 $\mu_z \sim xp_y \sim yp_x$。若系统具有点群 C_{3v} 对称性，取某个反射面 σ_v 过 y 轴和 Z 轴，在 σ_v 作用下，$\vec{r}$ 和 $\vec{p}$ 的 y 分量不变，而 x 分量变号，故 $\sigma_v\mu_z = -\mu_z$。可见 μ_z 相应于 C_{3v} 群的 1 维不可约表示 A_2，在一般情况下，$\vec{\mu}$ 的 x 和 y 方向分量应相应 C_{3v} 的 2 维 E 表示，故 $\mu_z\Psi_j^{(v)}$ 是 C_{3v} 群 $A_2 \otimes D^{(v)}$ 直积表示的基函数，而 $\mu_x\Psi_j^{(v)}$ 和 $\mu_y\Psi_j^{(v)}$ 是此群直积表示 $E \otimes D^{(v)}$ 的基函数，欲使矩阵元 $(\Psi_i^{(u)}, \vec{\mu}\Psi_j^{(v)}) \neq 0$，即要约化这两个直积表示，看其是否包含不可约表示 $D^{(u)}$，因为

$$\begin{cases} A_2 \otimes A_1 = A_2 \\ E \otimes A_1 = E \end{cases}, \begin{cases} a_2 \otimes A_2 = A_1 \\ E \otimes A_2 = E \end{cases}, \begin{cases} A_2 \otimes E = E \\ E \otimes E = A_1 \oplus A_2 \oplus E \end{cases}$$

可见对磁偶矩跃迁，从 $A_1 \to A_1$ 和 $A_2 \to A_2$ 是禁戒跃迁。

如果系统的哈密顿对称群是纯转动对称操作（不包含中心反射或平面反射），自然无法区分极矢量和轴矢量，则电偶矩和磁矩跃迁的选择定则是一样的。

（5） 电四极矩跃迁

电四极矩是普通三维空间的一个二阶张量，当空间坐标变换为 $\vec{x} \to \vec{x}' = g_a\vec{x}$，即 $x_i' = \sum_k a_{ik}x_k$ 时，则二阶张量变换为 $A_{ij}' = \sum_{k,r} a_{ik} a_{jr}A_{kr}$。而电四极矩通常是个对称张量（$A_{ij}=A_{ji}$），且要满足 $A_{xx} + A_{yy} + A_{zz} = 0$，故其独立分量只有五个，我们可选取 A_{zz}，A_{xx}-A_{yy}、

A_{xy}，A_{yz}和 A_{xz}五个分量，这相当于 $l=2$ 的球谐函数 $Y_{lm}^{(\theta,\varphi)}$，从前面讨论可看出，欲求其跃迁选择定则，就要确定其各个分量相应对称群的哪些表示的基函数。若体系的哈密顿群为 C_{3v}，则 A_{zz}分量对应该群的 A_1 表示，A_{zx}和 A_{zy}对应于 $A_1 \otimes E=E$ 表示，而 A_{xy}和(A_{xx}-A_{yy})对应于 E 表示。故电四极矩只对应 C_{3v}群的 A_1 和 E 表示。由于

$$\begin{cases} A_1 \otimes A_1 = A_1 \\ E \otimes A_1 = E \end{cases}, \begin{cases} A_1 \otimes A_2 = A_2 \\ E \otimes A_2 = E \end{cases}, \begin{matrix} A_1 \otimes E = E \\ E \otimes E = E \oplus A_1 \oplus A_2 \end{matrix}$$

可知 C_{3v}对称性系统的电四极矩跃迁和电偶极矩情况一样，其 A_1 与 A_2 之间的跃迁都是禁戒的。

假如体系的对称群为点群 D_{2d}，其特征标如下表所示。从表中可看出，矢量的 Z 分量属于 B_2 表示，故 A_{zz}属于 $B_2 \otimes B_2=A_1$ 表示，由于 $B_2 \otimes E=E$，可知 A_{zx}和 A_{zy}属于 E 表示，又因为对称张量 x^2，xy 和 y^2 属于对称化的直积表示$(E \otimes E)=A_1 \oplus B_1 \oplus A_2 \oplus B_2$，不难看出 x^2+y^2 对应 A_1 表示，xy 属于 B_2 表示，而(x^2-y^2)属于 B_1 表示。因为

D_{2d}	e	C_2、	$S_4(2)$	$C'_2(2)$	$\sigma_d(2)$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1	-1
B_1	1	1	-1	1	-1
(Z)、B_2	1	1	-1	-1	1
(x,y)、E	2	-2	0	0	0

$$\begin{cases} A_1 \otimes A_1 = A_1 \\ B_1 \otimes A_1 = B_1 \\ B_2 \otimes A_1 = B_2 \\ E \otimes A_1 = E \end{cases}, \begin{cases} A_1 \otimes A_2 = A_2 \\ B_1 \otimes A_2 = B_2 \\ B_2 \otimes A_2 = B_1 \\ E \otimes A_2 = E \end{cases}, \begin{cases} A_1 \otimes B_1 = B_1 \\ B_1 \otimes B_1 = A_1 \\ B_2 \otimes B_1 = A_2 \\ E \otimes B_1 = E \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 \otimes B_2 = B_2 \\ B_1 \otimes B_2 = A_2 \\ B_2 \otimes B_2 = A_1 \\ E \otimes B_2 = E \end{cases}, \begin{cases} A_1 \otimes E = E \\ A_2 \otimes E = E \\ B_2 \otimes E = E \\ E \otimes E = A_1 \oplus A_2 \oplus B_1 \oplus B_2 \end{cases}$$

可见这时的 $A_1 \rightleftharpoons A_2$ 和 $B_1 \rightleftharpoons B_2$ 的跃迁皆为禁戒的。

习 题 三

3—1 试找出可能存在的二维晶体对称性点群。

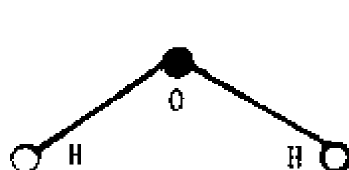
3—2 试画出点群 C_5, C_{5V}, C_{5h}, D_5 和 D_{5h} 的极射赤面投影，并讨论群元的分类。

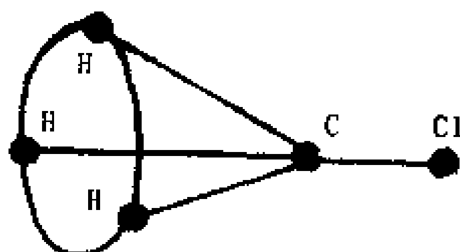
3—3 利用极射赤面投影验证点群 S_5 正是 C_{5h}。

3—4 试指出下列分子的对称性点群：

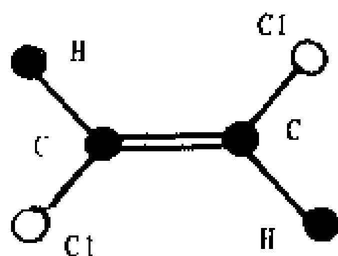
(a) 线状分子 O═C═C═C═O 和 HF

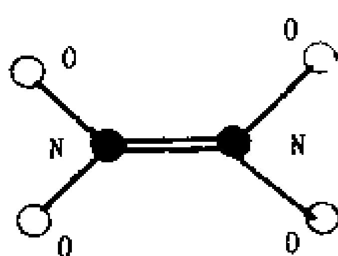
(b) H_2O, SO_2, H_2S 等，(c) NH_3, CH_3Cl, PCl_3 等

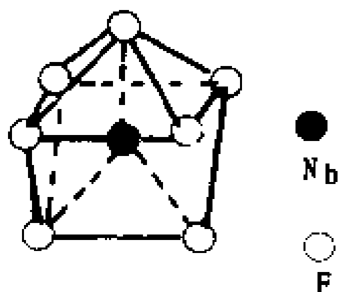




(d) $C_2H_2Cl_2$ 和 N_2O_4







(e) $N_bF_7^{2-}$

3—5 做出 D_3 群的乘法表和元素分类，它包含哪些子群和不变子群？

3—6 利用下表给出的基函数，填点群 C_{2v} 的特征标表

C_{2v}	E	C_2	$\sigma_v(xz)$	$\sigma'_v(yz)$	基函数
A_1					z；x^2,y^2,z^2；$z(x^2-y^2)$
A_2					R_z；　xy；xyz
B_1					x,R_y；xz；$x(x^2-3y^2)$
B_2					y,R_x；yz；$y(3x^2-y^2)$

3—7 约化点群 C_{3v} 的特征标为 6，0，0 的可约表示和它的两个 2 维直积表示。

3—8 约化表中给出的点群 D_4 的各个可约表示。

D_4	E；	$2C_4$；	C_2；	$2C'_2$；	$2C''_2$
Γ_1	3	−1	−1	1	−1
Γ_2	2	2	2	0	0
Γ_3	8	0	0	0	0
Γ_4	4	−2	0	−2	2

3—9 约化下列给定点群的直积表示

点群	直积表示
C_{4v}	$A_1\otimes A_1$，$A_2\otimes B_1$，$B_2\otimes E$，$E\otimes E$
C_{6v}	$A_2\otimes B_1$，$A_2\otimes B_2$，$B_2\otimes E_1$，$B_2\otimes E_2$
T_d	$F_1\otimes F_2$，$E\otimes F_2$
C_4	$B\otimes E$，$E\otimes E$

3—10 根据点群 D_2 的特征标表，判断下列函数各属于 D_2 的哪个不可约表示的基函数：x，y，z，R_x，R_y，R_z，x^2-y^2，x^2+y^2，z^2，xz，xy，yz，z^3，xz^2，yz^2，xyz，$z(x^2-y^2)$，$x(x^2-3y^2)$ 和 $y(3x^2-y^2)$

3—11 利用给定的基函数定出点群 C_{5v} 的特征标

C_{5v}	E, $2C_5$, $2C_5^2$, $5\sigma_v$	基函数
A_1		Z
A_2		R_Z
E_1		(x, y)
E_2		(x^2-y^2, xy)

3—12 试证明空间群元满足关系

(1) $\{R_i|\vec{\tau}\}^{-1}\{E|\vec{t}\}\{R_i|\vec{\tau}\}=\{E|R_i^{-1}\vec{t}\}$

(2) $\{R_i|\vec{\tau}\}^{-1}\{R_j|\vec{\sigma}\}\{R_i|\vec{\tau}\}=\{R_i^{-1}R_jR_i|R_i^{-1}(R_j\vec{\tau}+\vec{\sigma}-\vec{\tau})\}$

3—13 指出图 3.15 中字母 T,z 和 Λ 代表的矢量 $\vec{k}$的小群。

3—14 在晶体空间群中,证明乘积操作 $p(\vec{n})R_ip(-\vec{n})$是表示相对于格点 $\vec{n}$的与 R_i 相同的转动。

3—15 试证明倒格矢$\vec{K}_m$与晶格具有同样的点群对称性。

3—16 若矢量 $\vec{k}$的小群是 G_L,试证此 $\vec{k}$的星中任一矢量的小群也是 G_L。

3—17 试讨论轨道动量矩为 l 的原子在具有 D_4 和 D_3 群对称的晶体场中的能级劈裂。

第四章　线性群和张量表示

线性群(经典群)是几何和物理学中经常碰到的线性空间变换群。该群的研究存在着两种并行的理论：一方面，因为它是线性空间的全体非奇异变换矩阵的集合，我们可借助比较熟识的张量代数及杨氏图来研究它们的有限维不可约表示，这是本章的内容。由于置换群 S_n 不论在线性群的高秩张量表示的约化中，还是对 n 个全同粒子物理系统的研究中都起着重要作用，因此本章将对 S_n 群做进一步讨论。其中的某些内容只注重于实用性介绍，而没有给出严格的数学论证；另一方面，线性群又是连续群，可通过李群和李代数的根权理论来研讨它，由于它在物理学中的广泛应用，下一章将较详细地介绍。

§4.1　线性群及其维数

1—1　基矢变换与一般线性群

在矢量空间 V_N 中，其 N 个基矢 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots\vec{e}_N$ 的选取并不唯一，每选定一组基矢，就对应一个坐标系，不同坐标系之间通过一个 $N\times N$ 的非奇异矩阵将两组基矢连结起来。设 $S=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots\vec{e}_N\}$，$S'=\{\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\cdots\vec{e}'_N\}$ 和 $S''=\{\vec{e}''_1,\vec{e}''_2,\cdots\vec{e}''_N\}$ 是三个不同的坐标系，如果 $\vec{e}'_i=\sum_j A_{ij}\vec{e}_j$，$\vec{e}''_k=\sum_i B_{ki}\vec{e}'_i$ 则 $\vec{e}''_k=\sum_{ij} B_{ki}A_{ij}\vec{e}_j=\sum_j (BA)_{kj}\vec{e}_j$ 即 S 和 S'' 是乘积矩阵 (BA) 对应的变换，若以矩阵乘法定义为群乘法，不难证明全体 N 维的非奇异矩阵将构成所谓的线性群(矩阵群或经典

群)。若 V_N 是 N 维复空间(或实空间),其对应的线性群以 $GL(N,C)$(或 $GL(N,R)$)标记。显然,这些矩阵本身就是线性群的一个忠实表示(自然表示或矢量表示)。

对于 g 阶有限群,其每个群元可以 g_m 代表,当参数 m 从 1 跑到 g 时,将给出所有群元素,而线性群是连续群,其群元有无穷多个而无法编码,但它的每个群元仍可用类似于参数 m 的一组实参数 $a_1,a_2,\cdots a_r$ 来标征它,其中至少要有一个参数在某一区域内连续改变,这 r 个实参数是标征群元所必需的,称 r 为连续群的维数。$GL(N,C)$群的每个群元都是一个 N 维复矩阵它有 N^2 个矩阵元,除去非奇异条件外没有任何限制,故每个群元需要 $2N^2$ 个实参数来标征,$GL(N,C)$是一个 $2N^2$ 维连续群,而 $GL(N,R)$则是个 N^2 维连续群。

1—2　直积空间与张量

由两个矢量空间 V_n^1 和 V_m^2 可构成一个新的$(n+m)$维直和矢量空间 $V_n^1\oplus V_m^2$ 和 $n\cdot m$ 维直积矢量空间 $V_n^1\otimes V_m^2$.

设$\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots\vec{e}_n\}$是 V_n^1 的基矢,而$\{\vec{f}_1,\vec{f}_2,\cdots\vec{f}_m\}$是 V_m^2 的基矢,若两个空间的基矢分别按$\vec{e}_i'=\sum\limits_r A_{ir}\vec{e}_r$和$\vec{f}_j'=\sum\limits_S B_{js}\vec{f}_s$线性变换,则其直和空间的基矢变换矩阵将是(4.1.1)式的块对角结构。

$$\begin{pmatrix} \overbrace{A}^{n} & \Big| & \overbrace{O}^{m} \\ \hline O & \Big| & B \end{pmatrix}\begin{matrix}\}n \\ \}m\end{matrix} \tag{4.1.1}$$

如果 G_i 是 $V^i(i=1,2)$的基矢变换线性群,则上式的直和矩阵集合称之直和群 $G_1\oplus G_2$。显然,块对角形式的变换群是该直和空间可能存在的基矢变换群的一个子群。

直积矢量空间 $V_n^1 \otimes V_m^2$ 的基矢是 $\{\vec{e}_i \otimes \vec{f}_j\}$，$i=1,2,\cdots,n$，$j=1,2,\cdots,m$. 该直积空间中的任意元素 $\vec{\xi}$ 可表示为

$$\vec{\xi} = \sum_{ij} \xi_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{f}_j \tag{4.1.2}$$

一般说来 $\vec{\xi} \neq \vec{\xi}^1 \otimes \vec{\xi}^2$（$\xi^i$ 为 V^i 的矢量），当 V^i 的基矢变换分别为 $\vec{e}' = A\,\vec{e}$ 和 $\vec{f}' = B\,\vec{f}$ 时，则相应直积空间的基矢变换为

$$\begin{aligned} \vec{e}'_i \otimes \vec{f}'_j &= \sum_r (A_{ir}\vec{e}_r) \otimes \sum_s (B_{js}\vec{f}_s) \\ &= \sum_{r,s} A_{ir} B_{js} (\vec{e}_r \otimes \vec{f}_s) \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

这是该 nm 维矢量空间一切可能的线性变换群的一个子群，通常称之直积群或张量积群 $G_1 \otimes G_2$。

张量是直积矢量空间的一个元素，物理应用中往往只对矢量空间自身的两次或多次直积感兴趣，设 V_N 的 K 次直积空量为 $V_N^{\otimes K} = V_N \otimes \cdots \otimes V_N$，它的 N^K 个基矢则为

$$\{\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_K}\}, \quad i_j = 1,2,\cdots,N; \quad i = 1,2,\cdots,K$$

当 V_N 的基矢变换为 $\vec{e}'_j = \sum_i A_{ji} \vec{e}_i$ 和 $\vec{e}''_k = \sum_j B_{kj} \vec{e}'_j$ 时，则 $(V_N)^{\otimes K}$ 空间的基矢变换为

$$\begin{aligned} \vec{e}'_{j_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}'_{j_K} &= \sum_{(i)} (A_{j_1 i_1} \cdots A_{j_K i_K} \vec{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_K}) \\ &= A^{\otimes K} \vec{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_K} \\ \vec{e}''_{k_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}''_{k_K} &= \sum_{(j)} (B_{k_1 j_1} \cdots B_{k_K j_K} \vec{e}'_{j_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}'_{j_K}) \\ &= \sum_{(i)} (BA)_{k_1 i_1} \cdots (BA)_{k_K i_K} \vec{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_K} \\ &= (BA)^{\otimes K} \vec{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_K} \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

直积空间 $V_N^{\otimes K}$ 中的任一元素 T 皆可以这 N^K 个基矢展开：

$$T = \sum_{(i)} t_{i_1 i_2 \cdots i_K} \vec{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_K} \tag{4.1.5}$$

称 T 为空间 V_N 上的 K 秩张量，由(4.1.4)式可知，V_N 的基矢变换为 A，则 $V_N^{\otimes K}$ 的基矢变换为 $A^{\otimes K}$，若 V_N 的线性群为 G，则 $V_N^{\otimes k}$ 的变换群为 $N^K \times N^K$ 的矩阵群 G^K，显然 G^K 是 G 的 N^K 维表示，通常称之线性变换群 G 的 K 秩张量表示，既然 G^K 是线性群 G 的 K 次矢量表示的直积，一般说来这是个可约表示。物理上常用到的各种线性群的一切可能的表示皆可从其张量表示的约化求得。若对 V_N 的线性变换矩阵加上一定限制，就会得到各种低维的典经群，它们都是 $GL(N,C)$ 或 $GL(N,R)$ 的子群。

1—3 各种经典群及其维数

$GL(N,C)$ 群中行列式为 1 的矩阵子集将构成复幺模群 $SL(N,C)$，这是个 $2(N^2-1)$ 维线性群。而对 N 维实空间，则可得到 (N^2-1) 维实幺模群 $SL(N,R)$。

一切 N 阶非奇异幺正矩阵集合 $\{A=(a_{ij})\}$ 将构成幺正群 $U(N)$，由于幺正条件限制

$$\sum_{l=1}^{N} a_{li}^{*} a_{lj}=\delta_{ij}$$

当 $i=j$ 时，只有 N 个实方程，而当 $i\neq j$ 时，有 $\frac{N(N-1)}{2}$ 个复方程，因此群 $U(N)$ 是个 N^2 维经典群。

$U(N)$ 群中行列式为 1 的矩阵子集将构成幺模幺正群 $SU(N)$，这是个 (N^2-1) 维连续群，群 $U(N)$ 和 $SU(N)$ 都在物理学中得到广泛应用。

$GL(N,C)$ 中全部正交矩阵 A 的集合将构成复正交群 $O(N,C)$，由正交条件 $\tilde{A}A=A\tilde{A}=I$，可推断这是个 $N(N-1)$ 维连续群，由于 $\det A=\det\tilde{A}$，$\det A=\pm 1$，因此可将此群分解不连通两部分，而 $\det A=+1$ 的正交矩阵集合将构成幺模正交群 $SO(N,C)$ 相应地也有实正交群 $O(N)$ 和 $SO(N)$，它们是 $N(N-1)/2$ 维

连续群。$SO(3)$群正是普通三维空间正交群，其群元是绕定点的一切可能转动。

在 N 维复空间中，保持任意的两个复矢量的斜对称双线型不变的一切线性变换矩阵集合，将构成所谓辛群 $S_p(N,C)$，设 x 和 y 为该空间的两个矢量，其斜对称双线型定义为

$$\{xy\}\equiv\sum_{i,k=1}^{N}g_{ik}x_iy_k,g_{ik}=-g_{ki} \tag{4.1.6}$$

显然，矩阵 $G=(g_{ik})$是斜对称的，若空间作线性变换$\vec{e'}_i=A\vec{e}_i=\sum_j a_{ji}\vec{e}_j$时

$$x_i\to x'_i=\sum_{i'}a_{ii'}x_{i'};y_k\to y'_k=\sum_{k'}a_{kk'}y_{k'}$$

根据不变性要求：

$$\begin{aligned}\{x'y'\}&=\sum_{i,k}\sum_{i',k'}g_{ik}a_{ii'}a_{kk'}x_{i'}y_{k'}\\&=\sum_{i',k'}(\tilde{A}GA)_{i'k'}x_{i'}y_{k'}\\&=\sum_{i'k'}g_{i'k'}x_{i'}'y_{k'}'\\&=\sum_{ik}g_{ik}x_iy_k=\{xy\}\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

这些线性变换 A 必须满足

$$\tilde{A}GA=G，或(\tilde{A}GA)_{ik}=G_{ik} \tag{4.1.8}$$

要求矢量 x 和 y 是非退化的双线型，即 $G\neq0$，故 $i\neq k$，在 N 个数中取两个不同数的方式共有 $N(N-1)/2$ 种，每种取法对应(4.1.8)式的一个复数方程。因此，辛群的独立实参数为 $2N^2-N(N-1)=N^2+N$ 又因为矩阵 G 是斜对称的，故有 $\tilde{G}=-G$，因此 $\det\tilde{G}=(-1)^N\det G$，然而，转置矩阵的行列式不变。由此可断定辛群对应的空间必是偶数维。实矢量空间的辛群以 $S_p(N,R)$代表，这是个 $N(N+1)/2$ 维连续群，表 4.1 给出常用经典群及其维数。

表 4.1　　　　经典群的维数

	实数群				复数群					
	$GL(N,R)$	$SL(N,R)$	$O(N,R)$ $SO(N,R)$	$Sp(N,R)$ $N=$偶数	$GL(N,C)$	$SL(N,C)$	$U(N,C)$	$SU(N,C)$	$Sp(N,C)$ $N=$偶数	$O(N,C)$ $SO(N,C)$
N	N^2	N^2-1	$N(N-1)/2$	$N(N+1)/2$	$2N^2$	$2(N^2-1)$	N^2	N^2-1	$N(N+1)$	$N(N-1)$
1	1				2		1			
2	4	3	1	3	8	6	4	3	6	2
3	9	8	3		18	16	9	8		6
4	16	15	6	10	32	30	16	15	20	12
5	25	24	10		50	48	25	24		20
6	36	35	15	21	72	70	36	35	42	30

§4.2　群代数

2－1　群代数及其约化

设 $G=\{g_i\}$ 是个 g 阶群，若以每个群元为基矢，则可张开一个 g 维线性矢量空间 $A(G)$，而 $A(G)$ 中的任意元素 x 皆可表为这 g 个群元的线性组合。

$$x=\sum_{i=1}^{g}x_i g_i \tag{4.2.1}$$

其中 $x_i\in C$ 是矢量 x 在基矢 g_i 上的分量，若 $A(G)$ 中的两个元素 x 和 y 分别为

$$x=\sum_i x_i g_i,\ y=\sum_j y_j g_j \tag{4.2.2}$$

则矢量 $z=\alpha x+\beta y$ 的分量为

$$z_i=\alpha x_i+\beta y_i$$

而 x 与 y 的乘积定义为

$$xy=\sum_{i,j}x_i y_i g_i g_j \tag{4.2.3}$$

根据群的封闭性，$g_i g_j \in G$，故上式定义的乘积仍是 $A(G)$的元素，因此有

$$xy=\sum_k C_k g_k, C_k=\sum_{i,j\to k}x_i y_j \tag{4.2.4}$$

上式中对记号"$i,j\to k$"求和代表对所有满足 $g_i \cdot g_j=g_k$ 的 i 与 j 求和。这样按照群 G 乘法所定的线性空间 $A(G)$是封闭的，称 $A(G)$为 G 的群代数。由于群满足结合律，故群代数也是个结合代数。如果 $A(G)$中包含一个子空间 B，且在 $A(G)$的乘法运算下也是封闭的，则称 B 为 $A(G)$的子代数；若取子代数 B 的任一元素 u，对于 $A(G)$的任意元素 x，都有 $xu\in B$，则称 B 是 $A(G)$的左理想。类似地也可定义其右理想。

不难看出，群 G 的每个表示将自动给出群代数 $A(G)$的一个表示，设 $A(G)$的某个元素为 $x=\sum_i x_i g_i$，则对应群表示 $D(G)=\{D(g_i)\}$，x 的表示为

$$D(x)=\sum_i x_i D(g_i) \tag{4.2.5}$$

反之亦然，$A(G)$的任意表示也将给出群 G 的一个表示，且它们表示的可约性也完全相对应。

让任意群元 $g_i\in G$ 左乘其群代数 $A(G)$的元素 x，由于群的封闭性，则有

$$g_i x=\sum_i x_j g_i g_j \in A(G)$$

这表明 $g_i x$ 仍是群代数 $A(G)$的一个元素，故 $A(G)$是群 G 的一个不变空间。这里值得注意的是，群元 g_i 扮演着双重角色；一方面它作为基矢，张开 G 的不变空间，即群代数 $A(G)$；另一方面它又是作用在 $A(G)$上的群算符。如果 $g_i\in G$ 作用在 $A(G)$的基矢 g_k 上，既然 $A(G)$是 G 的不变空间，则有

$$g_i g_k=\sum_j D_{jk}(g_i)g_j, \qquad (i,k=1,2,\cdots,g) \tag{4.2.6}$$

其中 $D_{jk}(g_i)$是线性组合系数。由于 $g_i \cdot g_k \in G$,故有

$$D_{jk}(g_i)=\begin{cases}1, & g_ig_k=g_j\\ 0, & g_ig_k\neq g_j\end{cases} \tag{4.2.7}$$

由第二章有限群的正规表示特性,上式说明 $A(G)$正是群 G 的正则表示所相应的表示空间,已知任何 g 阶有限群的正则表示是个 g 维完全可约表示,它将包含此群的全部不可约表示,且每个不可约表示出现的次数恰等于该不可约表示的维数。既然 $A(G)$的正则表示空间,必定是个完全可约空间。显然,每个左理想 $\&_i$ 都是一个不变子空间,故 $A(G)$可约化为群 G 的全部不等价不可约表示相应的不变子空间——不可约左理想的直和。设 $D^{(\mu)}$是 G 的 n_μ 维不可约表示,则 $A(G)$必包含着 n_μ 个正交的不可约左理想 $\&_i^{(\mu)}$, $i=1,2,\cdots,n_\mu$ 定义 $D^{(\mu)}$对应的总左理想为

$$\&^{(\mu)}=\sum_i^{n_\mu}{}^{\oplus}\&_i^{(\mu)}=\&_1^{(\mu)}\oplus\&_2^{(\mu)}\oplus\cdots\oplus\&_{n_\mu}^{(\mu)} \tag{4.2.8}$$

如果 G 有 N 个不等价不可约表示,则相应的群代数 $A(G)$必可分解为这些不等价的总左理想的直和。

$$A(G)=\sum_{\mu=1}^{N}{}^{\oplus}\&^{(\mu)}=\&^{(1)}\oplus\&^{(2)}\oplus\cdots\oplus\&^{(N)} \tag{4.2.9}$$

我们可类似地定义群代数 A 的右理想,并将 $A(G)$分解为其右理想之直和。方程(4.2.8)和(4.2.9)仅仅给出了群代数分解的理论框架,欲直接应用它们把 $A(G)$约化为诸左理想的直和,并求出与各个左理想相应的群 G 的全部不可约表示是不可能的。因为要借助群的不变空间求相应的不可约表示,就要首先写出这个空间的一组基矢,而§2.7 投影算符告诉我们,欲求这组基矢又需知道不可约表示矩阵元,既然各个不可约表示还是待求的,也就无法确定相应表示空间的基矢。为了在群 G 的各个不可约表示尚不晓得之前把 $A(G)$约化为诸左理想的直和,我们可通过新的途径去寻找各个左理想的基矢。

2—2 幂等元

设群代数 A 可分解为 k 个左理想 $\mathcal{L}_i(i=1,2,\cdots,k)$ 的直和，则有

$$A=\mathcal{L}_1\oplus\mathcal{L}_2\oplus\cdots\oplus\mathcal{L}_k$$

$$x\mathcal{L}_i=\mathcal{L}_i,\qquad x\in A \tag{4.2.10}$$

对于任一元素 $S\in A$，必可表为诸左理想的元素 $S_i\in\mathcal{L}_i$ 的和。

$$S=S_1+S_2+\cdots+S_k \tag{4.2.11}$$

符合(4.2.10)式的左理想集合称之 A 的完备左理想集，而 S_i 为 S 在 $\mathcal{L}_i$ 中的分矢量。

显然，群 G 的单位元素 $e\in A$，且满足

$$eS=Se=S\qquad(S\in A) \tag{4.2.12}$$

因此，它也应有相应(4.2.11)式的完备左理想集的分解式

$$e=e_1+e_2+\cdots+e_k \tag{4.2.13}$$

将(4.2.11)和(4.2.13)式代入方程(4.2.12)得

$$\begin{aligned}S&=S_1+S_2+\cdots+S_k=Se=S(e_1+e_2+\cdots+e_k)\\&=Se_1+Se_2+\cdots+Se_k\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{L}_i$ 是左理想，而上式两边属于同个左理想的元素必定相等，$Se_i\in\mathcal{L}_i$，因此有

$$S_i=Se_i \tag{4.2.14}$$

若 S 在 $\mathcal{L}_i$ 之中，自然有

$$S=Se_i,Se_j=0(j\neq i) \tag{4.2.15}$$

特别是我们可取 $S=e_i$，则有

$$\begin{cases}e_i=e_i^2\\e_i\cdot e_j=0(i\neq j)\end{cases}\qquad i,j=1,2,\cdots,k \tag{4.2.16}$$

对于群代数的某个元素，若它的平方等于其自身，从而它的任意整数次幂仍为自身，这样的元素称之幂等元。由(4.2.14)和(4.2.15)可知，对于任意元素 $S\in A$，都有 $Se_i\in\mathcal{L}_i$，当 S 跑过 A 的全

部元素时，Se_i 也将给出 $\mathcal{L}_i$ 的所有元素，该结果可形式上表为

$$\mathcal{L}_i = Ae_i, \qquad i=1,2,\cdots,k \tag{4.2.17}$$

故幂等元 e_i 又称之左理想 $\mathcal{L}_i$ 的生成元。

如果一个幂等元不能再进一步分解为满足(4.2.16)式的多个更小幂等元之和，则称它为原始幂等元(不可约幂等元)，否则称之可约幂等元。自然，由原始幂等元生成的左理想是不可约的，称它为最小左理想。因此，群代数最终可表为一系列最小左理想的直和。实际上，你要求某群代数的幂等元，只需找到满足(4.2.18)式的元素 y。

$$y^2 = \alpha y \tag{4.2.18}$$

其中 α 为任意常数。如果找到元素 y，则可令 $y' = \frac{1}{\alpha} y$，显然 y' 是个满足(4.2.16)式的幂等元，故幂等元可相差一个常数因子。

以置换群 S_3 为例来讨论它的群代数及其幂等元。群 S_3 有 6 个元素，故其群代数 $A(S_3)$ 中的任意元素 x 可表为

$$x = ae + b(12) + c(13) + d(23) + f(123) + g(132)$$

其中 a,b,c,d,f 和 g 是任意实数，$A(S_3)$ 是群 S_3 的正则表示空间，在 $A(S_3)$ 中若取元素 P 和 Q 分别为

$$P = \sum_{p \in s_3} p \qquad Q = \sum_{q \in s_3} \delta_q q \tag{4.2.19}$$

其中，δ_q 为置换 q 的宇称，上式是对 S_3 的所有元素求和，由群的封闭性和重排定理可知，除相差某常数因子外，P 和 Q 都是原始幂等元。若左乘上式任意群元 $\tau \in S_3$，立即可得到

$$\tau P = P, \qquad \tau Q = \delta_\tau Q \tag{4.2.20}$$

此式表明 P 和 Q 都生成 1 维的左理想，而每个群元 τ 在 P 中都对应于 1，这是个恒等表示；在 Q 中的每个群元对应其宇称，故这是个完全反对称表示。

最后，我们还要特别指出，对于一般有限群 G，直接去找它的群代数 $A(G)$ 包含的最小左理想是比较困难的。然而凯雷定理告诉我们，任意一个 n 阶有限群都同构于置换群 S_n 的一个子群，这表明一般有限群的结构都包含在相应的置换群中，欲求 n 阶有限群的不可约表示，可先求 S_n 的不可约表示（但对于群 G 而言，这可能是可约表示）。同时还可借助 S_n 的表示约化方法来约化各种经典群的张量表示。因此，下面先将群代数约化理论应用于置换群。

§4.3 标准杨盘和杨氏算子

前面曾讨论过 n 个客体的置换群 S_n 的一些基本性质，已知 S_n 是个 $n!$ 阶有限群；其共轮类数 K 等于 n 的可能配分数；每个共轭类包含群元数目由(1.5.1)式给出；由于 S_n 的任一群元与它的逆元具有相同的配分，故置换与其逆置换必是同类元素；S_n 的每个群元都可表示脱位循环积，而每个循环又可表为对换积，置换的宇称取决于分解对换积的奇偶数个因子。

既然 S_n 是个有限群，其不等价不可约表示的个数 N 必为 S_n 的共轭类个数 K，即对应 n 的一个配分 $[\lambda]=[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n]$，$(\sum_i \lambda_i = n)$，我们不仅可划出相应的杨氏图，而且可以这个配分或杨氏图来标征这个不可约表示。

给定 n 的配分 $[\lambda]$ 和相应的杨氏图，如果随意地将 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数码分别填入该杨氏图的每个方格中，则称这种填入数码的杨氏图为杨氏盘。如 $n=5$ 的某个配分为 $[3,2]$，其可能的杨氏盘有 $n!$ 个，其中一个为

1	4	5
2	3	

(4.3.1)

若 P 代表杨氏盘中同行数码之间的置换，则各行内一切可能置换之和称之该盘的行对称化算子或行算子，用符号 P 代表

$$P=\sum_{p} p \tag{4.3.2a}$$

类似地，以 q 代表盘中同列数码间的置换，则各列内的一切可能置换将构成列对称化算子或列算子 Q，若 δ_q 代表 q 的置换宇称，则有

$$Q=\sum_{q} \delta_q q \tag{4.3.2b}$$

如(4.3.1)给出的杨氏盘 $p=(14)(23)$或$(145)(23)$；
$q=(12)$或$(12)(34)$，而其行算子和列算子分别为

$$\begin{aligned}P=&e+(14)+(45)+(15)+(145)+(541)+(23)+\\&(14)(23)+(23)(45)+(15)(23)+(145)(23)+\\&(541)(23)\end{aligned}$$

$$Q=e-(12)-(34)+(12)(34)$$

由列算子和行算子可定义相应杨氏盘的杨氏算子 $y^{[\lambda]}$。

$$y^{[\lambda]}=QP=\sum_{p,q} \delta_q q p \tag{4.3.3}$$

显然，(4.3.2)式中的求和将会导致对应同样配分(或杨氏图)的某些不同杨氏盘具有相同的杨氏算子，例如下列的三个杨氏盘对应着同样的杨氏算子

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 4 & 3 \\ \hline\end{array} \tag{4.3.4}$$

称具有相同杨氏算子的杨氏盘为等价盘。在一组等价盘中可选取一个代表，称之标准杨盘或标准盘。它是将这 n 个数码分别填入对应配分的每个方格中，并确保每行从左到右，每列从上到下的数码都是递增的。(4.3.4)给出的三个等价盘只有第一个是标准盘。关于标准盘和杨氏算子的性质，存在以下两个重要定理：

定理一：设$[\lambda]$为 n 的一个配分，则该配分某个杨氏盘的杨氏

算子 $y^{[\lambda]}$实质上是群代数 $A(S_n)$的一个原始幂等元(可差某个常数因子)。

由于群代数 $A(S_n)$的原始幂等元可生成不可约左理想,同时又是群 S_n 的一个不可约表示对应的表示空间,因此,它将给出 S_n 的一个不可约表示。该定理断定 $y^{[\lambda]}$是 $A(S_n)$的原始幂等元,故可由它求得 S_n 的相应该杨氏图的不可约表示。如果选取 S_n 的一切配分相应的全部标准杨氏盘,就可得到该群的全体不可约表示。下面以几个简单实例阐明它的用法。

当 $n=2$ 时,只有[2]和[1^2]两个配分分别对应 $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2\\\hline\end{array}$ 和 $\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline\end{array}$ 两个标准盘。其杨氏算子分别为$\{e+(12)\}$和$\{e-(12)\}$,显然它们具有原始幂等元性质

$$[e+(12)][e-(12)]=0$$

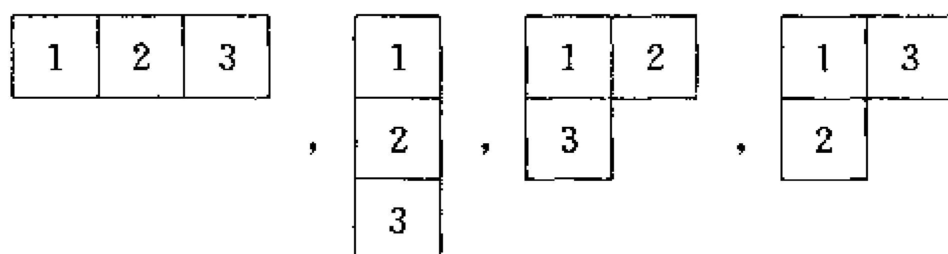
$$[e\pm(12)][e\pm(12)]=e^2\pm2e(12)+(12)(12)$$
$$=2[e\pm(12)]$$

单位元素 e 可分解为两个原始幂等元之和

$$e=\frac{e+(12)}{2}+\frac{e-(12)}{2}=e_1+e_2$$

e_1 生成恒等表示,e_2 生成 1 维反对称表示。

当 $n=3$ 时,只有[3],[1^3]和[2,1]三个配分,有四个标准盘与其对应



若以 $P=\sum\limits_{p\in s_3}p$,$Q=\sum\limits_{q\in s_3}\delta_q q$,$Y=e+(12)-(13)-(123)$和 $Y'=e-(12)+(13)-(132)$分别代表它们的杨氏算子,不难验证这四个杨氏算子都满足原始幂等元条件,且有

$$e=\frac{1}{6}P+\frac{1}{6}Q+\frac{1}{3}Y+\frac{1}{3}Y'$$

每个杨氏算子将生成群 S_3 的一个不可约表示。

定理二：对于置换群 S_n 而言，属于 n 的同一配分的所有杨氏盘所生成的不可约表示都是等价的；而属于不同配分的杨氏盘所确定的不可约表示是不等价的。

该定理再次给出 S_n 群不可约表示与 n 之配分间的一一对应关系。就是说，n 的一个配分不仅可标记 S_n 群的一个共轭类，也可来标记该群的一组互相等价的不可约表示。为明确起见，以后用配分 $[\alpha]=[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n]$ 标记共轮类，而以 $[\lambda]=[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n]$ 来标记 S_n 的不可约表示 $D^{[\lambda]}$。设配分最小左理想，即群 S_3 的正则表示包含两个 2 维表示 $D^{[2,1]}$。其杨氏算子分别为 $Y_1=Y$ 和 $Y_2=Y'$。

可以证明，对于一般的置换群 S_n，其单位元 e 可分解为全体原始幂等元之和

$$\begin{aligned} e&=\sum_{[\lambda]}\sum_{r=1}^{f^{[\lambda]}}\frac{f^{[\lambda]}}{n!}y_r^{[\lambda]}=\sum_{[\lambda]}\sum_{r=1}^{f^{[\lambda]}}=Y_r^{[\lambda]} \\ Y_r^{[\lambda]}&\equiv\frac{f^{[\lambda]}}{n!}y_r^{[\lambda]} \end{aligned} \qquad (4.3.5)$$

上式重新定义的杨氏算子完全符合(4.2.16)式规定的原始幂等元条件：$Y_r^{[\lambda]}\cdot Y_r^{[\lambda]}=Y_r^{[\lambda]}$，而不同的杨氏算子相乘正交相消。

§4.4 置换群的不可约表示及其特征标

由于置换群 S_n 的特殊重要性，人们从不同角度对它进行了深入研究，给出了求其不可约表示维数、表示矩阵及特征标的各种不同方法，既然我们能将其群代数 $A(S_n)$ 通过杨氏，算子(或幂等元)约化为一系列左理想之直和，自然可以求 $[\lambda]$ 共有 $f^{[\lambda]}$ 个标准盘，由定理一可知，每个标准盘对应 S_n 的一个不可约表示，它相应的杨氏算子将生成最小左理想。定理二告诉我们这 $f^{[\lambda]}$ 个不可约表

示是群 S_n 的同维等价表示，即群代数 $A(S_n)$将包含 $f^{[\lambda]}$个同维最小左理想，也就是说，群 S_n 的正则表示包含着 $f^{[\lambda]}$个不可约表示 $D^{[\lambda]}$。有限群表示论告诉我们，正则表示中所包含不可约表示 $D^{[\lambda]}$ 的次数恰等于该表示的维数，故配分〔λ〕对应的标准盘数 $f^{[\lambda]}$也正是该配分对应的不可约表示 $D^{[\lambda]}$的维数，若以 $D^{[\lambda]}_{rs}$来标记表示 $D^{[\lambda]}$ 的矩阵元，以 $r,s=1,2,\cdots,f^{[\lambda]}$来标记配分〔$\lambda$〕所相应的第 r 或第 s 个标准盘的编码，则每个标准盘对应的杨氏算子也可用 $r=1,2,\cdots,f^{[\lambda]}$来标记。以群 S_3 的〔2，1〕配分为例，它对应着 $\begin{matrix}1&2\\3&\end{matrix}$ 和 $\begin{matrix}1&3\\2&\end{matrix}$ 两个标准盘，故群代数 $A(S_3)$包含两个 2 维最小左理想，即群 S_3 的正则表示包含二个 2 维表示 $D^{[2,1]}$。然而，用这种方法求特征标和表示维数显得过于冗长和麻烦，在讨论经典群的张量表示的约化和表示基矢时，可借助这种方法。若单纯研究置换群，可从物理学的实际应用出发。下面将不加证明地介绍几种简便方法。

4—1 置换群的不可约表示维数

这里介绍两种可很快确定其不可约表示维数的方法。

1° 因 n 的配分与群 S_n 的不可约表示 $D^{[\lambda]}$一一对应，§4.3 定理二曾推得不可约表示 $D^{[\lambda]}$的维数 $f^{[\lambda]}$必等于该配分〔λ〕相应的所有标准盘数目。对于低阶置换群，这种方法比较实用，而且这对于以后求其表示矩阵和约化经典群的张量表示，以及求不可约表示基矢都很有帮助。

例如，配分〔2，1〕只有 $\begin{matrix}1&2\\3&\end{matrix}$ 和 $\begin{matrix}1&3\\2&\end{matrix}$ 两个标准盘，因此 S_3 群的不可约表示 $D^{[2,1]}$是 2 维矩阵，即 $f^{[2,1]}=2$。又如配分〔3，1〕存在以下三个标准盘

1	3	4
2		

1	2	4
3		

1	2	3
4		

因此 S_4 的不可约表示 $D^{[3,1]}$ 的维数 $f^{[3,1]}=3$。

2° 对于高阶置换群，用标准盘求 $f^{[\lambda]}$ 不太方便，因此在只需求表示维数而不求其表示矩阵时，可直接用伏雷姆(Frame)，鲁宾逊(Robinson)和斯罗尔(Thrall)三人给出的计算公式(1961 年)

$$f^{[\lambda]}=\frac{n!}{\prod\limits_{i}\alpha_i} \tag{4.4.1}$$

式中 α_i 为配分$[\lambda]$对应的杨氏图中第 i 个方格的"钩长"。所谓方格钩长是指由该方格向右和向下划直线所连结的方格数目(图 4.1)，作为例子，以(4.4.1)式来计算 S_7 群相应配分$[4.2.1]$的不可约表示维数 $f^{[4,2,1]}$. 该图各方格的钩长都标在格中(图 4.2)。因此

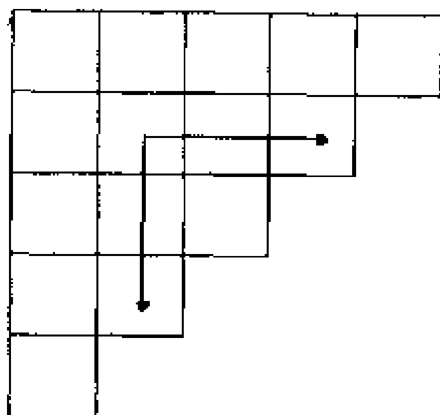


图 4.1

6	4	2	1
3	1		
1			

图 4.2

$$f^{[4,2,1]}=\frac{7!}{6\cdot4\cdot2\cdot1\cdot3\cdot1\cdot1}=35$$

利用公式(4.4.1)计算 S_n 群的不可约表示维数十分简便，以后称它为钩长法。

4—2 置换群的不可约表示

群 S_n 的全部不可约表示矩阵可通过标准盘和原始幂等元对

应的最小左理想的两种方法来求得。

既然配分[λ]对应不可约表示 $D^{(\lambda)}=\{D^{(\lambda)}_{(\sigma)}\}$ 的维数 $f^{(\lambda)}$ 等于其标准盘个数，故每个标准盘以 $S^{(\lambda)}_r$ 标记，[λ]标征不可约表示，而 $r=1,2,\cdots,f^{(\lambda)}$ 代表杨氏图编码(次序任意)，σ 是 S_n 的任意群元。对应的表示矩阵 $D^{(\lambda)}_{(\sigma)}$ 是个 $f^{(\lambda)}$ 维的方阵，其矩阵元为 $D^{(\lambda)}_{rs}(\sigma)$，$r,s=1,2,\cdots,f^{(\lambda)}$。

由于 S_n 的任何群元都可表为对换积形式，而任意两个数码的对换又可写为相邻两数码的对换积，故 S_n 的每个群元都可写成一组相邻数码$(k-1,k)$的对换积。只要晓得全体相邻数对换的表示矩阵 $D^{(\lambda)}_{(k-1,k)}$，则可求得所有群元的表示矩阵 $D^{(\lambda)}_{(\sigma)}$。例如

$$(12)(23)(12)=(12)(213)=(12)(132)=(13)$$

$$(12)(23)(34)(23)(12)=(12)(234)(23)(12)=(14)$$

可见，只要求得对换(12)，(23)和(34)等的表示矩阵，那末群元(13)和(14)等的表示矩阵也可求得，从而就确定了 S_n 的一个表示。群 S_n 的不可约表示 $D^{(\lambda)}$ 中，其相邻数码 $k-1$ 和 k 对换的表示矩阵元 $D^{(\lambda)}_{rs}(k-1,k)$ 由以下规则求得：

$$D^{(\lambda)}_{rr}(k-1,k)=1, \text{当 } k-1 \text{ 和 } k \text{ 在 } S^{(\lambda)}_r \text{ 同行内}$$

$$D^{(\lambda)}_{rr}(k-1,k)=-1, \text{当 } k-1 \text{ 和 } k \text{ 在 } S^{(\lambda)}_r \text{ 同列内} \tag{4.4.2a}$$

当数码 $k-1$ 和 k 不在标准盘 $S^{(\lambda)}_r$ 的同行或同列内时，$S^{(\lambda)}_s$ 是经$(k-1,k)$对换后而得到的另一标准盘，则其表示矩阵元为

$$D^{(\lambda)}_{rr}(k-1,k)=-\rho, D^{(\lambda)}_{rs}(k-1,k)=D^{(\lambda)}_{sr}(k-1,k)$$
$$=\sqrt{1-\rho^2} \tag{4.4.2b}$$
$$D^{(\lambda)}_{ss}(k-1,k)=\rho, D^{(\lambda)}_{\alpha\beta}(k-1,k)=0(\text{其它矩阵元})$$

上式中的 ρ^{-1} 称之标准盘 S^{λ}_r 中数字 $k-1$ 与 k 的轴间矩，即在 S^{λ}_r 中从 $k-1$ 到 k，向左或向下过一个方格为+1，向右或向上过一个方格为−1，其代数和称之 $k-1$ 到 k 的轴间矩。例如，对于标准盘

$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$，2 到 3 的轴间距 $\rho_{23}^{-1}=2$，而 3 到 2 的 $\rho_{32}^{-1}=-2$，1 到 2 的 $\rho_{12}^{-1}=-1$。

利用公式(4.4.2)可方便地求出 S_n 群的所有不等价不可约表示。例如，对于群 S_3 的不可约表示 $D^{[3]}$，它只有一个标准盘 $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline\end{array}$，故 $D^{[3]}$是 1 维表示。而对换(12)和(23)的表示矩阵为 $D_{(12)}^{[3]}=1$，$D_{(23)}^{[3]}=1$。显然，这是 S_3 的恒等表示。而在不可约表示 $D^{[1^3]}$中，也只有一个标准盘 $\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline\end{array}$，(12)和(23)相应的表示矩阵为 $D_{(12)}^{[1^3]}=-1$，$D_{(12)}^{[1^3]}=-1$，这是 S_3 群的 1 维完全反对称表示。对于表示 $D^{[2,1]}$，它有两个标准盘 $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$ 和 $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$，由公式(4.4.2)可得群元(12)和(23)对应的表示矩阵为

$$D_{(12)}^{[2,1]}=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix} \qquad D_{(23)}^{[2,1]}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

根据以上的表示矩阵，就可求出群 S_3 的三个不等价不可约表示，以表 4.2 所示。

表 4.2　　　　置换群的不可约表示

	e	(12)	(23)	(13)	(123)	(132)
$D^{[3]}$	1	1	1	1	1	1
$D^{[1^3]}$	1	−1	−1	−1	1	1
$D^{[2,1]}$	$\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$

我们还可以通过最小左理想来求 S_n 群不可约表示。已知每个杨氏算子是群代数 $A(S_n)$的原始幂等元，因此它可生成最小左理

想，从而可求得该群的一个不可约表示。具体作法是，对应 n 的一个配分〔λ〕，要想求对应的表示 $D^{[\lambda]}$，可先由公式(4.4.1)求其表示维数 $f^{[\lambda]}$，再根据配分〔λ〕对应的某个标准盘写出其杨氏算子 $y^{[\lambda]}$。本应用所有群元左乘 $y^{[\lambda]}$，求得相应的左理想，但由于此左理想维数 $f^{[\lambda]}$ 已知，因此，只要 S_n 的某些群元左乘 $y^{[\lambda]}$ 后能从中选取 $f^{[\lambda]}$ 个线性独立的 $A(S_n)$ 元素，并以它们作为最小左理想的基矢集合，有了这 $f^{[\lambda]}$ 个不变空间的基矢，再让每个群元对这组基矢作用，就可求得相应的表示矩阵。

实际上，(4.2.20)式给出的恒等表示 $D^{[n]}$ 和完全反对称表示 $D^{[1^n]}$ 就是用的这种方法。下面再以此方法求 S_3 的不可约表示 $D^{[2,1]}$。若取配分〔2，1〕对应的标准盘为 $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array}$ ，则其杨氏算子为

$$y=e+(12)-(13)-(123)$$ 以群元(12)左乘 y 得

$$(12)y=e+(12)-(23)-(132)$$

显然，y 和 $(12)y$ 是线性独立的。又因 $f^{[2,1]}=2$，故它们可作为 $A(S_3)$ 的最小左理想的基矢。令

$$y=\Phi_1, \qquad (12)y=\Phi_2$$

则有

$$(13)\Phi_1=-\Phi_1, (13)\Phi_2=-\Phi_1+\Phi_2$$

根据基矢线性变换关系立即可推得群元(13)的表示矩阵

$$D^{[2,1]}_{((13))}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

通过类似计算可得到其它群元的表示矩阵：

$$\begin{aligned} &D^{[2,1]}_{(e)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D^{[2,1]}_{((12))}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &D^{[2,1]}_{((23))}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, D^{[2,1]}_{((123))}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (4.4.3) \\ &D^{[2,1]}_{((32))}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

显然，这里给出的 2 维表示 $D^{[2,1]}$ 与表示 4.2 的不同，但这两者是完全等价的。若取非奇异矩阵 $X=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ 1 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}$ 和 $X^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ 对(4.4.3)式作相似变换，就可得到表 4.2 中的 $D^{[2,1]}$ 表示。

设 τ 为配分$[\lambda]$对应的杨氏盘，若将其行方格与列方格对换，就得到一个新配分$[\tilde{\lambda}]$杨氏图，则称$[\tilde{\lambda}]$对应的表示 $D^{[\tilde{\lambda}]}$ 为 $D^{[\lambda]}$ 的伴随表示，其相应的杨氏盘 $\tilde{\tau}$ 是 τ 的转置盘。如果 τ 与 $\tilde{\tau}$ 有相同的配分，则称该表示为自伴随表示。根据配分$[\lambda]$所相应的标准盘数目等于表示 $D^{[\lambda]}$ 的维数，不难推断其中伴随表示维数 $f^{[\tilde{\lambda}]}=f^{[\lambda]}$。例如 $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4\\ \hline 2 \\ \cline{1-1} 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$ 和 $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3\\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array}$ 是互为转置盘，故 $D^{[2,1^2]}$ 和 $D^{[3,1]}$ 互为 S_4 群的两个 3 维伴随表示；虽然 $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2\\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$ 和 $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3\\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$ 互为转置盘，但它俩配分都是[2,1]，故 $D^{[2,1]}$ 是 S_3 群的 2 维自伴随表示。

4—3 置换群不可约表示的特征标

由 S_n 群的各个不可约表示矩阵，自然可求得相应特征标。然而，在用群论研究物理问题时往往并不需要知道表示矩阵，只需要其特征标。为此，下面介绍求 S_n 群不可约表示 $D^{[\lambda]}$ 的特征标 $X^{[\lambda]}_{(\alpha)}$ 的两种方法。

1° 杨氏算子法

因 n 的每个配分$[\lambda]$对应 S_n 的一个不可约表示 $D^{[\lambda]}$，其中某个标准盘的杨氏算子 $y^{[\lambda]}$ 具有群代数 $A(S_n)$ 的原始幂等元性质，故由它可生成一个不变子空间。若以配分$[\alpha]=[\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n]$标记共轭类，令 $h^{[\lambda]}_{(\alpha)}$ 为算子 $y^{[\lambda]}$ 中出现$[\alpha]$类群元之前的系数代数和，$g_{(\alpha)}$ 为

S_n 中$[\alpha]$类群元个数(类阶数),则该表示中$[\alpha]$类群元的特征标可由(4.4.4)式给出。

$$X_{(\alpha)}^{[\lambda]}=\frac{f^{[\lambda]}}{g_{(\alpha)}h_{(\alpha)}^{[\lambda]}} \tag{4.4.4}$$

其中,表示维数 $f^{[\lambda]}$既可由配分$[\lambda]$的标准盘个数或(4.4.1)式求得,也可由(4.4.5)式直接求得

$$f^{[\lambda]}=\sqrt{\frac{n!}{\sum\limits_{(\alpha)}|h_{(\alpha)}^{[\lambda]}|^2/g_{(\alpha)}}} \tag{4.4.5}$$

例 1　求 S_3 群不可约表示 $D^{[2,1]}$的各类元素的特征标。

它的标准盘可取 $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$,对应的杨氏算子为

$$y^{[2,1]}=e-(13)+(12)-(123)$$

由此可确定

$$\begin{aligned}&h_{(1^3)}^{[2,1]}=1,h_{(2,1)}^{[2,1]}=0,h_{(3)}^{[2,1]}=-1\\&g_{(1^3)}=1\quad g_{(2,1)}=3\quad g_{(3)}=2\end{aligned} \tag{4.4.6}$$

将(4.4.6)式代入(4.4.5)和(4.4.4)式,立即得到 $f^{[2,1]}=2$,$D^{[2,1]}$的 各类元素特征标为

$$X_{(1^3)}^{[2,1]}=2,X_{(2,1)}^{[2,1]}=0,X_{(3)}^{[2,1]}=1$$

例 2　求 S_4 群 $D^{[3,1]}$表示的特征标

若取标准盘为 $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array}$,则其杨氏算子为

$$\begin{aligned}y^{[3,1]}=&e+(12)+(13)+(23)-(14)-(14)(23)+(123)+\\&(132)-(124)-(134)-(1234)-(1324)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&h_{(1^4)}^{[3,1]}=1,\quad h_{(2,1^2)}^{[3,1]}=2,\quad h_{(2^2)}^{[3,1]}=-1,\\&h_{(3,1)}^{[3,1]}=0,\quad h_{(4)}^{[3,1]}=-2.\end{aligned} \tag{4.4.7a}$$

$$\begin{aligned}&g_{(1^4)}=1,\quad g_{(2,1^2)}=6,\quad g_{(2^2)}=3,\\&g_{(3,1)}=8,\quad g_{(4)}=6.\end{aligned} \tag{4.4.7b}$$

将(4.4.7)式代入(4.4.4)和(4.4.5)式得到 $f^{[3,1]}=3$,其各类元素

特征标为

$$X^{[3,1]}_{(1^4)}=3, X^{[3,1]}_{(2,1^2)}=1, X^{[3,1]}_{(2^2)}=-1=X^{[3,1]}_{(4)}, X^{[3,1]}_{(3,1)}=0$$

按上述方法，便可作出 S_4 群的特征标表

表 4.3　　　　　　S_4 的特征标表

$(\alpha)(g_i)$ \ $D^{[\lambda]}$	(1^4) 1	$(3,1)$ 8	$(2,2)$ 3	$(2,1^2)$ 6	(4) 6
$[4]$	1	1	1	1	1
$[1^4]$	1	1	1	−1	−1
$[2,2]$	2	−1	2	0	0
$[3,1]$	3	0	−1	1	−1
$[2,1^2]$	3	0	−1	−1	1

不难看出，S_n 群的两个互为伴随表示 $D^{[\lambda]}$ 和 $D^{[\tilde{\lambda}]}$ 中，其偶宇称的共轭类(α)的特征标 $X^{[\lambda]}_{(\alpha)}=X^{[\tilde{\lambda}]}_{(\alpha)}$，奇宇称的共轭类$(\beta)$的特征标 $X^{[\lambda]}_{(\beta)}=-X^{[\tilde{\lambda}]}_{(\beta)}$；而其自伴随表示中，所有奇宇称的共轭类的特征标恒为零。

2° 阶梯法

所谓杨氏图的“阶梯”是由该杨氏图右下方的边缘带上的所有方格组成，如图 4.3 中阴影部分所示。由阶梯法求 S_n 群不可约表示特征标有多种形式，这里只介绍砌阶梯和填充两种形式，最后由里特乌德(Littlewood)定理直接给出表示 $D^{[\lambda]}$ 的共轭类(λ)的特征标 $X^{[\lambda]}_{(\alpha)}$ 为

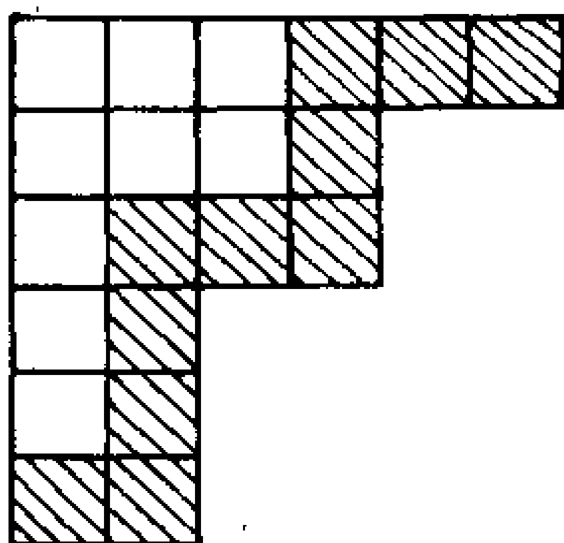


图 4.3　杨氏图的阶梯

$$X_{(\alpha)}^{(\lambda)}=\sum_i d_i, \qquad d_i=\pm 1 \qquad (4.4.8)$$

配分$(\alpha)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m)$既是共轭类的标记，又代表标有同数码的连续方格数分别为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$个。求和号$\sum_i$是对下述约定的各种可能方式求和。即由标“1”的$\alpha_1$个连续方格，依次再加上标“2”的$\alpha_2$个连续方格…，一直加到由“$m$”标码的$\alpha_m$个连续方格，最后到配分$[\lambda]$对应的方格图。但在依次砌加连续方格过程的每一步，都要确保上一行方格不少于其下一行方格数，且每步砌加的α_e个连续方格只能是图 4.3 所示的阶梯形的一部分。d_i的正负号取决于每次相加的连续格子的“竖距”(即此数码所占的行数减 1)之代数和。

例 1　以砌阶梯法求$X_{(4,2^2)}^{[4,2^2]}$。

呈部分阶梯形状的 4 个标“1”连续格子，2 个标“2”和 2 个标“3”连续格子堆砌成$[4,2^2]$方格图，只有以下 4 种方式，即$i=1,2,3,4$.

1	1	2	2
1	3		
1	3		

1	1	3	3
1	2		
1	2		

1	1	1	1
2	2		
3	3		

1	1	1	1
2	3		
2	3		

$$d_1=(-1)^{2+0+1}=-1,\quad d_2=(-1)^{2+1+0}=-1$$

$$d_3=(-1)^{0+0+0}=1,\quad d_4=(-1)^{0+1+1}=1$$

由(4.4.8)式得

$$X_{(4,2^2)}^{[4,2^2]}=-1-1+1+1=0$$

例 2　求$X_{(2,1^2)}^{[3,1]}$。

假若有标“1”的 2 个方格，标“2”和“3”的各 1 个方格，则按约定堆砌为配分$[3,1]$的杨氏图将有以下三种方式：

1	1	2
3		

1	1	3
2		

1	2	3
1		

↓　　↓　　↓

$$d_1=(-1)^{0+0+0}=1, d_2=(-1)^{0+0+0}=1, d_3=(-1)^{1+0+0}=-1$$

$$X^{[3,1]}_{(2,1^2)}=1$$

这里值得注意的是以这种方式求特征标与连续格子的编码次序无关，如果次序选取恰当，将会减少所允许的堆砌方式。若将上例的方格编码次序改为标码“1”、“2”和“3”的方格数分别是 1 个，2 个和 1 个，则只有一种允许的方式为 $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$ ，故有 $X^{[3,1]}_{(2,1^2)}=(-1)^{0+0+0}=1$，结果相同。如果没有任何允许方式堆砌成杨氏图$[\lambda]$，则该类群元在表示 $D^{[\lambda]}$的特征标为零。

虽然砌阶梯法比较简单，但对较复杂的配分很难判断是否完备。在此基础上又产生了正规填充形式。欲计算特征标 $X^{[\lambda]}_{(\alpha)}$，可先划出$[\lambda]$的方格图，然后依次用“正规”填充法将 α_1 个 1，α_2 个 2，…α_m 个 m 分别填入每个方格中，若类$(\alpha)=(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m)$包含 m 个脱位循环，就要经过 m 次正规填充填完杨氏图$[\lambda]$，从而得到以“i”编码的一个允许图，并依照(4.4.8)式确定 d_i 和特征标。所谓正规填充法的规则是：

1° 填入相同数码的每组连续方格都必须是阶梯形的一部分。

2° 由杨氏图的任一方格向右或向下看，已填入的数字必须是不递减。

3° 在填入数字过程的每一步要确保已填数字的方格能呈杨氏图形式(即上行方格数不少于下行方格数)。

合理选取(α)类中因子 α_i 的次序，可减少正规填充的允许图，通常优先考虑循环长度短的 α_i 先填充。

例 3　求 $X^{[8,2]}_{(5^2)}$。

先划出杨氏图$[8,2]$，显然无法将 5 个数码“1”和 5 个“2”正规填到杨氏图中，故其特征标为零。

例 4　求 $X^{[20,2,1]}_{(14,8,1)}$。

1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2	2																		
2																			

这是个比较复杂的杨氏图，但取填充次序为 1 个“1”，8 个“2”和 14 个“3”，只有一种正规填充方式，故 $X^{[20,2,1]}_{\{14,8,1\}}=1$。如果改变编码次序，也将会得到相同结果。

§4.5　置换群表示的外积及其约化

设 A 和 B 分别为群 G 的 n 维和 m 维不可约表示，则 A 与 B 的直积是 G 的 $n\cdot m$ 维表示，一般说来这个直积表示是可约的，可约化为一组不可约表示的直和，通常称这种约化为克莱布西——高登(Clebsch－Gordon)级数。

群 S_n 是描述 n 个客体系统的置换对称性，它的两个不可约表示的直积仍是 S_n 的表示。为了区分下面引入的置换群不可约表示“外积”的概念，通常称 S_n 群这 种直积为“内积”，仍以$\otimes$标记。这种内积的约化可通过第二章的特征标法直接给出克莱布西——高登级数。例如

$$S_3: [2,1]\otimes[2,1]=[3]\oplus[2,1]\oplus[1^3]$$

$$S_4: [3,1]\otimes[2^2]=[3,1]\oplus[2,1^2]$$

$$S_5: [3,1^2]\otimes[3,1^2]=[5]\oplus[4,1]\oplus 2\cdot[3,2]\oplus [3,1^2]\oplus 2\cdot[2^2,1]\oplus[2,1^3]\oplus[1^5]$$

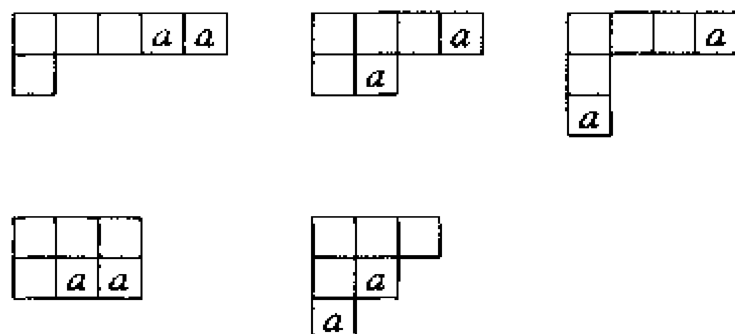
在讨论置换群的外积之前，先考虑分别包含 n_1 和 n_2 个全同粒子的两个孤立物理系统。只要两个子系统间不存在相互作用，则总系统的置换对称性将由直积群 $S_{n_1}\otimes S_{n_2}$ 来描写。n_1 个粒子所处的状态决定于 S_{n_1} 群的不可约表示，而 n_2 个粒子的状态决定于 S_{n_2} 的不可约表示。例如，当 $n_1=n_2=3$ 时，若两个子系统状态都对应表示 $[2,1]$，则系统 1 的 3 个粒子处于二重简并态 $\begin{smallmatrix}1&2\\3&\end{smallmatrix}$ 和

$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$，系统 2 的 3 个粒子处于二重简并态 $\begin{array}{|c|c|}\hline 4&5\\\hline 6\\\cline{1-1}\end{array}$ 和 $\begin{array}{|c|c|}\hline 4&6\\\hline 5\\\cline{1-1}\end{array}$。其直积表示将是直积群 $S_3 \otimes S_3$ 的不可约表示。然而，当两个子系统间有相互作用时，这 n_1+n_2 个全同粒子总系统将具有 $S_{n_1+n_2}$ 置换对称性，两个子系统间粒子可交换。我们感兴趣是该总系统将具有 $S_{n_1+n_2}$ 群的哪些不可约表示。这种由 S_{n_1} 和 S_{n_2} 不可约表示来探讨 $S_{n_1+n_2}$ 群的不可约表示的另外一种乘积表示称之置换群的外积或扩大积，以 $\overset{0}{\times}$ 来标记。我们这里将直接给置换群外积约化的一般规则，它对下面研讨线性群的张量表示约化是很有帮助的。以不可约表示〔3，1〕和〔2，1〕外积为例来说明约化的步骤和规则：

1° 画出置换群两个表示对应的方格图（最好以较简单的方格图作为“乘数”，此时为 $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & \ \\\hline \ \\\cline{1-1}\end{array} \overset{0}{\times} \begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\\hline \ \\\cline{1-1}\end{array}$，分别为 S_4 的 3 维和 S_3 的 2 维表示。

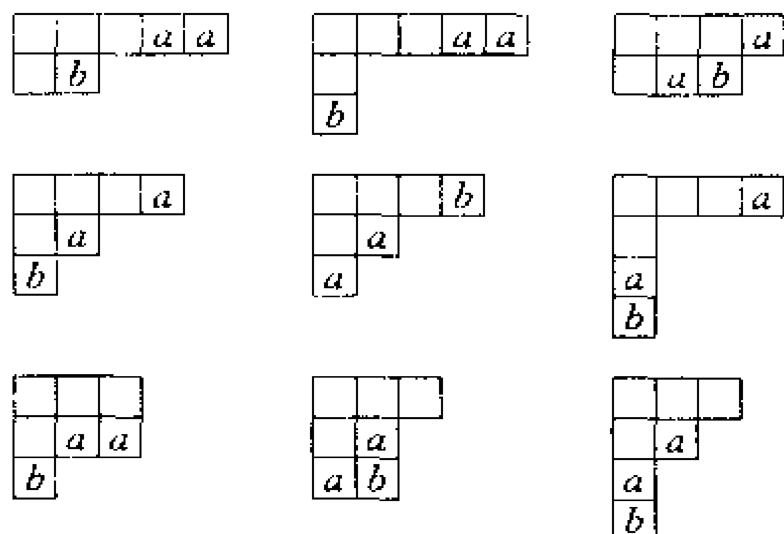
2° 在“乘数”方格图中，第一行内每个方格全标“a”，第二行的方格全标“b”…，$\begin{array}{|c|c|}\hline a&a\\\hline b\\\cline{1-1}\end{array}$。

3° 将标字母“a”的方格搬到“被乘数”方格图上，从而可得到新的杨氏图。在搬动方格时，同列内标字母“a”的方格最多出现一次，按此规定做出所有可能的新杨氏图，此时的结果将是



4° 然后再搬标字母“b”的方格，这时不仅要满足第 3 条规定，且从每个新得到的杨氏图中从右到左和从上到下数字母 b 出现的次数不能超过字母 a 出现的次数。以后再类似地按第 3 和 4 条规

定搬"c"方格,"d"方格…,这样得到的每个有 n_1+n_2 个方格的新图各对应 $S_{n_1+n_2}$ 群的一个不可约表示。不难看出,此例将有以下 9 个杨氏图,也就是说这两个表示的外积包含着 S_7 群的 9 个不可约表示:



若以配分形式,以上结果可简化为

$$[3,1]\overset{0}{\times}[2,1]=[5,2]\oplus[5,1^2]\oplus[4,3]\oplus 2\cdot[4,2,1]$$
$$\oplus[4,1^3]\oplus[3^2,1]\oplus[3,2^2]\oplus[3,2,1^2]$$

设 $D^{[\lambda_1]}$ 和 $D^{[\lambda_2]}$ 分别是置换群 S_{n_1} 和 S_{n_2} 的两个不可约表示,其表示维数分别是 $f^{[\lambda_1]}$ 和 $f^{[\lambda_2]}$。每当 (n_1+n_2) 个全同粒子选取 n_1 个放入系统 1,剩下的 n_2 个粒子放入系统 2,就有 $f^{[\lambda_1]}\cdot f^{[\lambda_2]}$ 个基函数来描述它们所处的状态,而考虑到全体粒子可交换之后,就有 $(n_1+n_2)!\,/n_1!\;n_2!$ 种方式这些粒子分别放到两个子系统中,故 $D^{[\lambda_1]}$ 与 $D^{[\lambda_2]}$ 的外积表示将有 $f^{[\lambda_1]}\cdot f^{[\lambda_2]}\dfrac{(n_1+n_2)!}{n_1!\;n_2!}$ 个基函数。其约化后所包含 $S_{n_1+n_2}$ 群的每个不可约表示的维数 $f^{[\lambda]}$ 可由(4.4.1)式给出,两边基函数的个数应相等,故有

$$f^{[\lambda_1]}\cdot f^{[\lambda_2]}\frac{(n_1+n_2)!}{n_1!\;n_2}=\sum_{[\lambda]}f^{[\lambda]} \tag{4.5.1}$$

置换群表示的外积约化可由公式(4.5.2)表达

$$D^{[\lambda_1]} \overset{\circ}{\times} D^{[\lambda_2]} = \sum_{[\lambda]}^{\oplus} d_{[\lambda]} D^{[\lambda]} \tag{4.5.2}$$

以上两式对配分$[\lambda]$求和是指符合图形搬动规则的所有杨氏图的配分，其每个都对应群 $S_{n_1+n_2}$的一个不可约表示，而 $d_{[\lambda]}$是相同配分$[\lambda]$的重复度。

(4.5.1)式可初步验证外积约化的结果是否正确。由此可直接将置换群表示的外积以维数表示出来。例如，上面讨论的外积约化可简单写为

$$\underline{3} \overset{\circ}{\times} \underline{2} = \underline{14} \oplus \underline{15} \oplus \underline{14} \oplus \underline{35} \oplus \underline{35} \oplus \underline{20} \oplus \underline{21} \oplus \underline{21} \oplus \underline{35}$$

例 2　求置换群不可约表示 $D^{[2,1]}$自身的外积约化。

根据以上约化规则可立即得到结果：

$$[2,1] \overset{\circ}{\times} [2,1] = [4,2] \oplus [4,1^2] \oplus [3^2] \oplus 2\cdot[3,2,1] \oplus [3,1^3] \oplus [2^3] \oplus [2^2,1^2]$$

或者　$\underline{2} \overset{\circ}{\times} \underline{2} = \underline{9} \oplus \underline{10} \oplus \underline{5} \oplus 2\cdot \underline{16} \oplus \underline{10} \oplus \underline{5} \oplus \underline{9}$

不难验证等式两边都有 80 个基函数。

§4.6　线性群的张量表示及其约化

6—1　线性群的高秩张量表示

在§4.1 中曾从 $GL(N,C)$群自然表示空间 V_N 的 N 个基矢 $\{\vec{e}_i\}$变换出发定义了该群的 K 秩张量表示，所谓 K 秩张量 T 则是 V_N 的 K 重直积空间 $V_n^{\otimes K}$ 的元素。这里

$$V_n^{\otimes K} \equiv \underbrace{V_N \otimes V_N \otimes \cdots \otimes V_N}_{K\text{个}}$$

$$T = \sum_{i_1=1}^{N} \cdots \sum_{i_K=1}^{N} \quad T_{i_1 i_2 \cdots i_K} \quad V_{i_1 i_2 \cdots i_K}$$

$$=\sum_{(i)} T_{(i)} V_{(i)} \tag{4.6.1}$$

若设$(i)\equiv(i_1 i_2\cdots i_k)$，$(j)\equiv(j_1 j_2\cdots j_k)$，则上式求和号$\sum_{(i)}$代表对每个$i_l$求和，$i_l=1,2,\cdots,N$，而$l=1,2,\cdots,K$。

在$GL(N,C)$的任意群算符$A(a)=[a_{ij}]$作用下，若V_N的基矢线性变换为

$$\vec{e}'_j=A(a)\vec{e}_j=\sum_k a_{kj}\vec{e}_k,\ j=1,2,\cdots,N. \tag{4.6.2a}$$

则V_N中任意元素(N维矢量)$X=\sum_i x_i\vec{e}_i$将变为一个新矢量X'。

$$X'=A(a)X=\sum_i x_i A(a)\vec{e}_i$$

$$=\sum_k(\sum_i a_{ki}x_i)\vec{e}_k=\sum_k X'_k\vec{e}_k。$$

由此式可看出，这个新矢量的$\vec{e}_k$上的分量X'_k与原矢量X的分量满足关系

$$X'_k=\sum_i a_{ki}x_i \tag{4.6.2b}$$

对于V_N的二重直积空间$V_N^{\otimes 2}$，则有所谓的N^2个2秩张量基V_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,N)$。在V_N按(4.6.2a)变换时，它们将按下式变换

$$V'_{ij}=A(a)V_{ij}=\sum_k\sum_l a_{ki}a_{lj}V_{kl} \tag{4.6.3}$$

而$V_N^{\otimes 2}$中的任一元素T(即一般线性群的2秩张量)可表为

$$T=\sum_{i,j}T_{ij}V_{ij}$$

在(4.6.2a)式所示的线性变换下，T将变为一个新的2秩张量T'，其分量关系为

$$T'=\sum_{k,l}T'_{kl}V_{kl}$$

$$T'_{kl}=\sum_{i,j}a_{ki}a_{lj}T_{ij} \tag{4.6.4}$$

显然，群$GL(N,C)$的一秩张量(即矢量)按矢量表示$D(G)$变换，其表示空间为V_N；而该群的2秩张量按矢量表示自身的直积

表示 $D(G)\otimes D(G)$ 变换，对应的表示空间为 $V_N^{\otimes 2}$。若将以上作法推广到 $GL(N,C)$ 群的 K 秩张量表示 T，共 N^K 个分量的变换关系为

$$T'_{i_1 i_2 \cdots i_K} = \sum_{j_1}\sum_{j_2}\cdots\sum_{j_K} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_K j_K} T_{j_1 j_2 \cdots j_K} \tag{4.6.5}$$

相应的 N^K 个 K 秩张量基 $V_{i_1 i_2 \cdots i_K}$ 的变换规律为

$$V'_{i_1 i_2 \cdots i_K} = \sum_{j_1}\sum_{j_2}\cdots\sum_{j_K} a_{j_1 i_1} a_{j_2 i_2} \cdots a_{j_K i_K} V_{j_1 j_2 \cdots j_K} \tag{4.6.6}$$

上式可缩写为

$$\begin{aligned} T'_{(i)} &= \sum_{(j)} a^{\otimes K}_{(i)(j)} T_{(j)} \\ V'_{(i)} &= \sum_{(j)} a^{\otimes K}_{(j)(i)} V_{(j)} \end{aligned} \tag{4.6.7}$$

由上面讨论可看出，$GL(N,C)$ 群的 K 秩张量是按其矢量表示 $D(G)$ 自身的 K 重直积表示（即 K 秩张量表示）变换。虽然矢量表示不可约，但其直积表示一般可约，也就是说这个 N^K 维的张量表示空间 $V_N^{\otimes K}$ 是个可约空间。下面将借助于置换群 S_K 的杨氏图方法把它们约化为一系列不变子空间，或等价于将 $GL(N,C)$ 群矢量表示的 K 重直积表示约化为该群不可约表示的 C—G 级数。因此，约化群 $GL(N,C)$ 的 K 秩张量表示为不可约张量表示，就等同于把相应的 K 重直积空间 $V_N^{\otimes K}$ 约化为不可约的张量空间。这也等同于把 K 秩可约张量约化成一系列不可约张量。

6—2 置换对张量的作用

设 T 为 $V_N^{\otimes K}$ 中的任一 K 秩张量

$$T = \sum_{i_1}\sum_{i_2}\cdots\sum_{i_K} T_{i_1 i_2 \cdots i_K} V_{i_1 i_2 \cdots i_K} \tag{4.6.8}$$

若从置换群 S_K 中任取一个置换元素 σ

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ \bar{1} & \bar{2} & \cdots & \bar{k} \end{pmatrix} \tag{4.6.9}$$

在 σ 置换下，数码 $i \to \sigma(i)=\bar{i}$，如果我们把群元 σ 对张量 T 作用，规定为只置换(4.6.8)式中分量 $T_{i_1 i_2 \cdots i_K}$ 的角标上，而不作用在张量基的角标上，这样就可得到一个新张量 T^σ

$$
\begin{aligned}
T^\sigma \equiv \sigma T &\equiv \sum_{i_1}\sum_{i_2}\cdots\sum_{i_k}\sigma T_{i_1 i_2 \cdots i_k} V_{i_1 i_2 \cdots i_k} \\
&= \sum_{i_1}\sum_{i_2}\cdots\sum_{i_k} T_{\bar{i}_1 \bar{i}_2 \cdots \bar{i}_k} V_{i_1 i_2 \cdots i_k}
\end{aligned} \tag{4.6.10}
$$

因此置换群元对张量分量的作用定义为

$$
\sigma T_{i_1 i_2 \cdots i_k} \equiv T^\sigma_{i_1 i_2 \cdots i_k} \equiv T_{\bar{i}_1 \bar{i}_2 \cdots \bar{i}_k} \tag{4.6.11}
$$

一般说来，置换之后的新张量 T^σ 与原张量是不同的。如果让 σ 同时也对张量基的角标作用，由于对哑指标求和与其记号无关，故置换之后仍是原张量。例如，T 是 $GL(2,C)$ 群的 3 秩张量。

$$
T = V_{111} + 2V_{211} + 4V_{221} + 3V_{112} + 4V_{122} + 5V_{212}
$$

让置换 $\sigma=(123)$ 对 T 作用，按定义式(4.6.11)则有

$$
\sigma T_{i_1 i_2 i_3} = T^\sigma_{i_1 i_2 i_3} = T_{i_2 i_3 i_1}
$$

故置换后的新张量为

$$
T^{(123)} = V_{111} + 3V_{211} + 5V_{221} + 4V_{122} + 4V_{212} + 2V_{121}
$$

显然，$T^{(123)} \neq T$。

6—3 置换和线性变换的可易性

设 T 为 $GL(N,C)$ 群的 K 秩张量，由(4.6.5)式给出其分量 $T_{(i)}$ 的线性变换。当置换群 S_K 的元素 σ 对该式的线性变换系数 $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_k j_k}$ 中的两组角标 (i) 和 (j) 同时作用时，只能改变这 K 个因子的前后次序，而数值不变，即

$$
a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_k j_k} = a_{\bar{i}_1 \bar{j}_1} a_{\bar{i}_2 \bar{j}_2} \cdots a_{\bar{i}_k \bar{j}_k} \tag{4.6.12a}
$$

或缩写为

$$
a^{\otimes k}_{(i)(j)} = a^{\otimes k}_{(\bar{i})(\bar{j})} \tag{4.6.12b}
$$

通常称之为张量线性变换系数的双对称性。例如，考虑 2 秩张量的某个线性变换系数 $a_{13}a_{32}$，这相当于 $i_1=1, j_1=3, i_2=3, j_2=2$。当 σ

＝(12)同时对两组角标作用后，$i_{\bar{1}}=i_2=3$，$j_{\bar{1}}=j_2=2$，$j_{\bar{2}}=j_1=1$，$j_{\bar{2}}=j_1=3$，，故有 $a_{i_{\bar{1}}j_{\bar{1}}}a_{i_{\bar{2}}j_{\bar{2}}}=a_{32}a_{13}=a_{13}a_{32}$。

根据群元对 K 秩张量作用的定义式(4.6.11)和其线性变换系数的双对称性，可推得下面的重要定理。

定理：对张量 $T\in V^{\otimes k}$ 作用的任何置换 $\sigma\in S_K$，可与该张量的线性变换算子 $A_{(a)}^{\otimes k}$ 相对易。以符号代表则为

$$\sigma(T')=(\sigma T)' \tag{4.6.13}$$

这里的"$'$"代表张量分量的线性变换，即

$$T'_{(i)}=a^{\otimes k}T_{(i)}=\sum_{j_1}\sum_{j_2}\cdots\sum_{j_k}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_kj_k}T_{j_1j_2\cdots j_k}$$

证明。由于(4.6.4a)式中求和指标$(j)=(j_1,j_2\cdots j_k)$是哑指标，故可将它改为$(\bar{j})=(j_{\bar{1}}j_{\bar{2}}j_{\bar{k}})$，则有

$$T'_{i_1i_2\cdots i_k}=\sum_{j_{\bar{1}}}\sum_{j_{\bar{2}}}\cdots\sum_{j_{\bar{k}}}a_{i_1j_{\bar{1}}}a_{i_2j_{\bar{2}}}\cdots a_{i_kj_{\bar{k}}}T_{j_{\bar{1}}j_{\bar{2}}\cdots j_{\bar{k}}}$$

当置换 $\sigma\in S_K$ 对上式两边作用时，可得

$$\sigma T'_{i_1i_2\cdots i_k}=T'_{i_{\bar{1}}i_{\bar{2}}\cdots i_{\bar{k}}}=\sum_{j_{\bar{1}}}\sum_{j_{\bar{2}}}\cdots\sum_{j_{\bar{k}}}a_{i_{\bar{1}}j_{\bar{1}}}a_{i_{\bar{2}}j_{\bar{2}}}\cdots a_{i_{\bar{k}}j_{\bar{k}}}T_{j_{\bar{1}}j_{\bar{2}}\cdots j_{\bar{k}}},$$

利用线性变换指标的双对称性，上式可改写为

$$\sigma T'_{i_1i_2\cdots i_k}=\sum_{j_{\bar{1}}}\sum_{j_{\bar{2}}}\cdots\sum_{j_{\bar{k}}}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_kj_k}T_{j_{\bar{1}}j_{\bar{2}}\cdots j_{\bar{k}}} \tag{4.6.14}$$

而 $T_{j_{\bar{1}}j_{\bar{2}}\cdots j_{\bar{k}}}=\sigma T_{j_1j_2\cdots j_k}$，而且，当对$(j_{\bar{1}}j_{\bar{2}}\cdots,j_{\bar{k}})$求和时，其每个指标都将从 1 跑到 N 的所有可能的 N 个自然数排列，自然$(j_1,j_2,\cdots,j_k)$也将跑遍这 N 个自然数的所有排列，只是先后次序不同，故(4.6.14)式又可改为对指标$(j_1j_2,\cdots,j_k)$求和，最后得到

$$\sigma T'_{i_1i_2\cdots i_k}=\sum_{j_1}\sum_{j_2}\cdots\sum_{j_k}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_kj_k}(\sigma T_{j_1j_2\cdots j_k}) \tag{4.6.15}$$

其缩写形式即为该定理(4.6.13)式。既然 S_K 群的任意置换都与线性变换算子 $A_{(a)}^{\otimes k}$ 对易，当然其群代数 $A(S_k)$ 的任何元素 $b=\sum_{\sigma}b_\sigma\sigma$ 也同算子 $A_{(a)}^{\otimes k}$ 可交换。

6—4　张量空间的约化

给定置换群 S_k 的一个杨氏盘，就有对应的杨氏算子 $y\in A(S_k)$。又由定理式(4.6.13)知，y 与张量空间 $V_N^{\otimes k}$ 的线性变换算子 $A_{(a)}^{\otimes k}$ 可对易。因为子空间 $yV_N^{\otimes k}\subset V_N^{\otimes k}$ 满足

$$A_{(a)}^{\otimes k}(yV_N^{\otimes k})=y(A_{(a)}^{\otimes k}V_N^{\otimes k})\subset yV_N^{\otimes k} \tag{4.6.16}$$

可见 $yV_N^{\otimes k}$ 是 $GL(N,C)$ 群的一个不变子空间，该子空间内的元素则称之不可约 K 秩张量。显然，这些不变子空间或不可约张量具有杨氏算子 y 相应的角标置换对称性。若 y 的杨氏图配分为$[\lambda]=[\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_N]$，可令 $yV_N^{\otimes k}=V_N^{(\lambda),K}$，并可用 y 相应的任一个标准盘来标记这种对称类型的不可约张量。例如，下面的标准盘就代表一个对称型为[5,3,2]的 10 秩不可约张量。

i_1	i_3	i_5	i_7	i_8
i_2	i_4	i_6		
i_9	i_{10}			

这种张量的分量又常常简写为

$$M_{i_1i_3i_5i_7i_8\cdot i_2i_4i_6\cdot i_9i_{10}\cdot} \tag{4.6.17}$$

我们所以要使这 K 个角标放入杨氏图呈标准盘形式，是因为每个角标 i_l 的取值范围都是由 1 到 N，只有这种规定才可避免不必要的分量重复。例如，二阶对称张量 $\boxed{i_1}\boxed{i_2}$ 和 $\boxed{i_2}\boxed{i_1}$ 是完全一样的，其分量都是 $M_{i_1i_2\cdot}=(e+(12))T_{i_1i_2}=T_{i_1i_2}+T_{i_2i_1}$。

由于张量角标 i_l 只在 1 到 N 范围内取值，如果杨氏图的行数 $>N$，则在第一列方格中至少有一对数码相同，这将因同列指标的反对称化而使之这种张量的所有分量恒为零。也就是说行数 $>N$ 的对称型不可约张量是不存在的。不难验证，子空间 $yV_N^{\otimes k}$ 中的元素(即一种不可约 K 秩张量)是 $GL(N,C)$ 群下不变的。例如，标准

盘 $\begin{array}{|c|}\hline i_1\\\hline i_2\\\hline\end{array}$ 代表完全反对称 2 秩张量，它是子空间 $V_N^{[1^2]}$ 中的元素，其分量为 $M_{i_1,i_2,}=(e-(12))T_{i_1i_2}=T_{i_1i_2}-T_{i_2i_1}$。在该群作用下按定义式(4.6.5)变为

$$
\begin{aligned}
M'_{i_1,i_2,} &= \sum_{j_1,j_2}(a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}T_{j_1j_2}-a_{i_2j_2}a_{i_1j_1}T_{j_2j_1}) \\
&= \sum_{j_1,j_2}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}(T_{j_1j_2}-T_{j_2j_1}) \\
&= \sum_{j_1,j_2}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}M_{j_1,j_2,}\in yV_N^{\otimes 2}=V_N^{[1^2],2}
\end{aligned}
$$

不同的标准盘对应不同的 S_K 群之杨氏算子，它们都是原始幂等元。根据(4.2.16)式，不难证明，由这些杨氏算子作用而得到的不变子空间是正交的，或者说这些不同子空间中的不可约 K 秩张量是线性无关的。因此，我们可利用 S_K 群的杨氏算子完备集来将张量空间 $V_N^{\otimes k}$ 约化为一组相互正交的不变子空间，或等价地将一个一般性 K 秩张量约化为一组具有特定对称性的各自独立的 K 秩张量，其具体步骤如下：

1° 画出整数 K 的各种可能配分$[\lambda]$的杨氏图，其行数$\leqslant N$；

2° 将 K 个角标 $i_1,i_2,\cdots i_k$ 按标准盘要求分别填入杨氏图的 K 个方格，所得到的每个标准盘就相应有一个杨氏算子 y；

3° 以每个 y 作用于 $V_N^{\otimes k}$ 上，从而得到该空间的一个不变子空间 $yV_N^{\otimes k}$；也可将 y 作用于 K 秩张量分量 $T_{i_1i_2\cdots i_k}$上，则可得到具有确定对称性的不可约 K 秩张量；

4° 由于 K 的配分$[\lambda]$对应的标准盘个数等于 S_K 群表示 $D^{[\lambda]}$ 的维数 $f^{[\lambda]}$，故空间 $V_N^{\otimes k}$ 可约化为独立的不变子空间的数目为 $\sum\limits_{[\lambda]}f^{[\lambda]}$。

例如，考虑 $GL(N,C)$群 3 秩张量($N\geqslant 3$)。因 $K=3$，只有$[3]$，$[1^3]$和$[2,1]$三种配分，前两个配分对应 S_3 群的 1 维表示。即 $f^{[3]}=f^{[1^3]}=1$；而 $f^{[2,1]}=2$，故只有以下四种标准盘，其杨氏算子分别

以 P,Q,Y 和 Y' 代表:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline i_1 & i_2 & i_3 \\ \hline\end{array}\qquad \begin{array}{|c|}\hline i_1 \\ \hline i_2 \\ \hline i_3 \\ \hline\end{array}\qquad \begin{array}{|c|c|}\hline i_1 & i_2 \\ \hline i_3 \\ \cline{1-1}\end{array}\qquad \begin{array}{|c|c|}\hline i_1 & i_3 \\ \hline i_2 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

因此,可将这个 3 秩张量约化为 4 个不同对称性的不可约张量之和

$$T=\frac{1}{6}PT+\frac{1}{6}QT+\frac{1}{3}YT+\frac{1}{3}Y'T \tag{4.6.18a}$$

若利用(4.6.17)式的符号,则该 3 秩张量的分量可表示为

$$T_{i_1i_2i_3}=\frac{1}{6}M_{i_1i_2i_3,}+\frac{1}{6}M_{i_1,i_2,i_3,}+\frac{1}{3}M_{i_1i_2,i_3,}+\frac{1}{3}M_{i_1i_3,i_2,} \tag{4.6.18b}$$

当 $n=3$ 时,标准盘 $\begin{array}{|c|c|}\hline i_1 & i_2 \\ \hline i_3 \\ \cline{1-1}\end{array}$ 对应的 3 秩不可约张量只有以下 8 个非零独立分量:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(T_{112}-T_{211})\\
&\frac{1}{2}(T_{113}-T_{311})\\
&\frac{1}{2}(T_{122}-T_{221})\\
&\frac{1}{2}(T_{133}-T_{331})\\
&\frac{1}{2}(T_{223}-T_{322})\\
&\frac{1}{2}(T_{233}-T_{332})\\
&\frac{1}{4}(T_{123}-T_{312}+T_{213}-T_{321})\\
&\frac{1}{4}(T_{132}-T_{213}+T_{312}-T_{231})
\end{aligned} \tag{4.6.19a}$$

以上每个分量对应的杨氏盘可依次写为

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\qquad(4.6.19b)$$

通常称这样的杨氏盘为标准分量盘(外尔盘)。填写外尔盘的规则是:(1)在杨氏图每个方格内填入 $1,2,\cdots,N$ 中的一个数字。(2)保持同行方格内从左至右数字不递减,而同列方格内数字自上向下递增。所有按此规则填写的外尔盘将是由其杨氏算子产生的独立不可约分量,这些分量的个数等于相应不变子空间的维数,也即不可约张量表示的维数。

综合上述可知,$GL(N,C)$群的 K 秩张量则是该群的一个可约表示($K\geqslant 2$),它可约化为一组不可约张量表示的直和,而每个不可约张量相应于一个行数$\leqslant N$ 的标准盘,其表示维数等于该杨氏图的标准分量盘个数。下面将对各种不同的线性群来研讨其不同对称型张量表示的维数。

§4.7 不可约张量表示维数

上一节讨论了 $GL(N.C)$群的各种不可约张量表示 $D_N^{[\lambda]}$,并指出该表示的维数 $r_N^{[\lambda]}$ 等于 K 之配分$[\lambda]$相应杨氏图的所有标准分量盘的个数,这也正是该对称型不可约张量独立的非零分量的个数。这里应指出 $r_N^{[\lambda]}$ 和 $f^{[\lambda]}$的根本区别,虽然表观上它们都对应着相似的方格图,但 $f^{[\lambda]}$是配分$[\lambda]$的标准盘个数,它是 S_K 群不可约表示维数,而与 N 无关,其相同配分的所有表示都是 S_K 的等价表示;然而 $r_N^{[\lambda]}$ 是将 1 到 N 这些自然数分别填入$[\lambda]$杨氏图每个方格中,所得到全部标准分量盘个数,它是 $GL(N,C)$群不可约表示维数,显然与 N 有关。以下将对各种对称型不可约张量分别进

行讨论。

7—1　完全反对称 K 秩张量

设 $M_{i_1,i_2,\cdots,i_k}$，是 K 秩完全反对称张量的分量，它对应只有一列 K 个方格杨氏图，其标准盘只有一个，它的 K 个角标要满足 $i_1<i_2<\cdots<i_k$，每当从 N 个自然数中取出 K 个不同数字，只有一种填法形成标准分量盘，故完全反对称 K 秩张量表示维数就等于从 N 个自然数中取 K 个不等数的方式数，即

$$r_N^{[k]}=C_N^K=\frac{N!}{K!\ (N-K)!} \tag{4.7.1}$$

当 $N=K$ 时，$r_N^{[k]}=1$

7—2　完全对称 K 秩张量

设 $M_{i_1i_2\cdots i_k}$是 K 秩完全对称张量的分量，它对应只有一行的 K 个方格杨氏图，其标准盘也只有一个。标准分量盘要求其 K 个角标满足 $i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_k$，显然它们满足不等式

$$i_1<i_2+1<i_3+2<\cdots<i_k+(K-1)$$

由于 i_k 的最大可取值是 N，故标准分量盘的个数就等于从 $(N+K-1)$ 个自然中取 K 个不同数的方式数，故

$$r_N^{(k)}=C_{N+K-1}^K=\frac{(N+K-1)!}{K!\ (N-1)!} \tag{4.7.2}$$

7—3　三秩混合对称张量

这类张量的标准盘有以下两种：

i_1	i_2
i_3	

i_1	i_3
i_2	

它们是不同对称型的三秩混合对称张量，其分量可分别以

$M_{i_1 i_2, i_3}$和 $M_{i_1 i_3, i_2}$代表。虽然它俩的表示维数相同，但并不是等价表示。首先考虑 i_1，i_2 和 i_3 不等时可构成标准分量盘数目，每当从头 N 个自然数中取三个不等数 $a<b<c$，则可构成两个标准分量盘 $\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c \\ \cline{1-1}\end{array}$ 和 $\begin{array}{|c|c|}\hline a & c \\ \hline b \\ \cline{1-1}\end{array}$，因此三个角标各不等的混合张量分量数为 $2 \cdot C_N^3$ 个。再考虑从头 N 个自然数中取两个数 $a<b$，此时标准分量盘只有 $\begin{array}{|c|c|}\hline a & a \\ \hline b \\ \cline{1-1}\end{array}$ 和 $\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline b \\ \cline{1-1}\end{array}$ 两种方式，故这类外尔盘共有 $2 \cdot C_N^2$ 个，因此三秩混合对称张量的表示维数为

$$r_N^{[2,1]} = 2(C_N^3 + C_N^2) = \frac{N(N^2-1)}{3} \tag{4.7.3}$$

7—4 一般对称型张量

以上给出了三种特殊对称型不可约张量表示的维数公式，而对任意型 K 秩张量，其表示维数将由以下两个等价的常用公式给出：

1° 外尔(Weyl)公式

$$r_N^{[\lambda]} = \prod_{i>j} \frac{(l_i - l_j)}{2!\ 3!\ \cdots (N-1)!} \tag{4.7.4}$$

根据配分$[\lambda]$的方格图，让我们来说明该式中符号的意义，不管杨氏图$[\lambda]$的行数等于还是小于 N，都将它视为 N 行，如果行数 $<N$，可认为它包含若干个有零方格的行。i 代表从最下行往上数的行序数，而 l_i 是第 i 行的方格数与 i 之和。

例 1 $N=3$，$K=7$，$[\lambda]=[4,2,1]$，求 $r_3^{[\lambda]}$

画出相应的杨氏图，标出行序数 i 和 l_i

i						
3	□	□	□	□	$+4$	$\Rightarrow l_3=7$
2	□	□	$+2$			$\Rightarrow l_2=4$
1	□	$+1$				$\Rightarrow l_1=2$

7,4 和 2 三个数之任意两者之差为 3,5 和 2,代入(4.7.4)式得

$$r_3^{[4,2,1]}=\frac{3\cdot5\cdot2}{2!}=15$$

例 2　利用外尔公式求三秩混合对称张量表示维数 $r_N^{[2,1]}$。

这时有 $l_1=1+0=1, l_2=2+0=2, \cdots l_{N-2}=N-2, l_{N-1}=N-1+1=N, l_N=N+2$,因此,

$$\prod_{i=1}^{N-1}(l_N-l_i)=(N+1)N\cdots4\cdot2=\frac{1}{3}(N+1)!$$

$$\prod_{i=1}^{N-2}(l_{N-1}-l_i)=(N-1)!$$

$$\vdots$$

$$l_2-l_1=1!$$

代入外尔公式可得

$$r_N^{[2,1]}=\frac{(N+1)!\ (N-1)!\ (N-3)!\ (N-4)!\cdots2!}{3\cdot2!\ 3!\ \cdots(N-2)!\ (N-1)!}$$

$$=\frac{(N+1)N(N-1)}{3}$$

$$=\frac{N(N^2-1)}{3}$$

所得结果与(4.7.3)式相同。

2° 鲁宾孙(Robinson)公式

从例 2 可看出,当 N 大时,利用外尔公式求表示维数比较麻烦。1961 年鲁宾孙给出利用钩长求维数的一个简便公式

$$r_N^{[\lambda]}=\prod_{i,j}\frac{(N+j-i)}{g_{ij}} \tag{4.7.5}$$

式中的 i 和 j 分别代表方格图[λ]的行和列指标,而 g_{ij} 为第 i 行第 j 列方格的钩长。

例 3　求 $r_1^{[4,2,1]}$。

首先绘好杨氏图[4,2,1],并标出每个方格的钩长,代入公式(4.7.5)得

$$r_4^{[4,2,1]}=\frac{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot3\cdot4\cdot2}{6\cdot4\cdot2\cdot3}=140$$

6	4	2	1
3	1		
1			

§4.8 线性群的分支律及其直积表示的约化

8—1 分支律

$GL(N,C)$群是所有 N 维非奇异矩阵的集合，它作用于有 N 个独立基矢的空间 V_N 上，V_N 则是该群的不变空间或矢量表示空间。如果该群中的某些元素保持其中的一个基矢不变，显然这些元素集合将构成 $GL(N-1,C)$群，它是 $GL(N,C)$的一个子群。若设第 N 个基矢不变，则指标 N 相对于子群 $GL(N-1,C)$将不起作用，而最终被去掉。既然 $GL(N-1,C)\subset GL(N,C)$，则 $GL(N,C)$的不可约表示 $D_N^{[\lambda]}$ 缩小在其子群 $GL(N-1,C)$上一般将是个可约表示，故 $D_N^{[\lambda]}$ 可约化为 $GL(N-1,C)$群的一系列不可约表示 $D_{N-1}^{[\lambda']}$的直和，其约化规律称之 $GL(N,C)$的不可约表示相对于群 $GL(N-1,C)$上的分支律。这种约化可依标准的特征标理论来进行，也可利用里特乌德的 S 函数方法。下面以 $GL(3,C)$群的不可约表示 $D_3^{[2,1]}$ 相对于 $GL(2,C)$上的分支律为例来说明这个过程。

由于 $D_3^{[2,1]}$ 对应于 $GL(3,C)$群 $\begin{array}{|c|c|}\hline i_1 & i_2 \\ \hline i_3 & \\ \cline{1-1}\end{array}$ 对称型的三秩混合张量表示，它的 8 个标准分量盘如(4.6.19a)所示。而 $GL(2,C)$是形如下面 B 式的非奇异矩阵集，它不改变 V_3 中矢量的第三分量，或者

$$B=\left(\begin{array}{cc:c} \multicolumn{2}{c:}{GL(2,C)} & 0 \\ & & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

说分量指标“3”不受变换 B 的影响，自然变换 $B^{\otimes 3}$对张量空间 $V_3^{\otimes 3}$之元素(三秩张量)分量指标“3”也没有任何影响。表示 $D_3^{[2,1]}$ 对应的 8 个标准分量盘中有两个分量盘不包含指标“3”，它们是

$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$ 和 $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$，故形成 $GL(2,C)$群的 2 维不可约三秩混合张量表示 $D_2^{[2,1]}$；另外三个分量为 $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$，$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$ 和 $\begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$，它们在同位方格内有指标"3"，故形成 $GL(2,C)$的 $\begin{array}{|c|c|}\hline \ &\ \\\hline\end{array}$ 型 3 维不可约表示 $D_2^{[2]}$；再有两个分量 $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$ 和 $\begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$，它们形成 $GL(2,C)$的 $\begin{array}{|c|}\hline \ \\\hline\end{array}$ 型 2 维矢量表示 $D_2^{[1]}$；最后还有一个分量 $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$，它是 $GL(2,C)$的 $\begin{array}{|c|}\hline \ \\\hline \ \\\hline\end{array}$ 型 1 维反对称 2 秩张量表示 $D_2^{[1^2]}$。这样就得到了 $GL(3,C)$的不可约表示 $D_3^{[2,1]}$ 相对于 $GL(2,C)$上的分支律为

$$^{N=3}\begin{array}{|c|c|}\hline \ &\ \\\hline \ \\\cline{1-1}\end{array} \Rightarrow {}^{2}\begin{array}{|c|c|}\hline \ &\ \\\hline \ \\\cline{1-1}\end{array} \oplus {}^{2}\begin{array}{|c|c|}\hline \ &\ \\\hline\end{array} \oplus {}^{2}\begin{array}{|c|}\hline \ \\\hline\end{array} \oplus {}^{2}\begin{array}{|c|}\hline \ \\\hline \ \\\hline\end{array}$$

维数 $=\{8\}\oplus\{2\}\oplus\{3\}\oplus\{2\}\oplus\{1\}$

通过以上讨论可以看出，这种约化过程是将原标准分量盘中填有指标"3"（对 $GL(N,C)$群则是指标"N"）的位置打上"×"号而后去掉，就可很快完成分支律。

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \ &\ \\\hline \ \\\cline{1-1}\end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline \ &\ \\\hline \ \\\cline{1-1}\end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|}\hline \ &\ \\\hline \times \\\cline{1-1}\end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|}\hline \ &\times \\\hline \times \\\cline{1-1}\end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|}\hline \ &\times \\\hline \ \\\cline{1-1}\end{array}$$

综合上述，可得如下定理。

定理：群 $GL(N,C)$的不可约表示 $D_N^{[\lambda]}$ 相对于其子群 $GL(N-1,C)$上，可约化为该子群的不可约表示 $D_{N-1}^{[\lambda']}$的直和。

$$D_N^{[\lambda]}=\sum_{[\lambda']}^{\oplus} D_{N-1}^{[\lambda']} \tag{4.8.1a}$$

其中求和是对所有满足(4.8.1b)条件的行数不超过 $N-1$ 的杨氏图$[\lambda']$进行。

$$\lambda_1\geqslant\lambda'_1\geqslant\lambda_2\geqslant\lambda'_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_{N-1}\geqslant\lambda'_{N-1}\geqslant\lambda_N \tag{4.8.1b}$$

而且，直和分解式中各项不可约表示的重复度都为 1。

按此定理，$GL(N,C)$的不可约表示空间 $V_N^{[\lambda]}$ 相对于其子群 $GL(N-1,C)$是个可约表示空间，它可约化为如下一些杨氏图所标记的不可约子空间的直和：它们是从杨氏图〔λ〕中去掉填标准分量盘时可允许填数字 N 的那些方格而得到的一组新杨氏盘〔λ′〕。当然，可填数字 N 的方格只能是每列中的最下边一个。如果〔λ〕的行数$<N$，那末该图本身也符合要求，因为这样的杨氏图可填成不含有数字 N 的标准分量盘。

例如，将 $GL(4,C)$的不可约表示 $D_4^{[3,1]}$ 作相对于 $GL(3,C)$上的分支律，按上述规则可得

或者以符号和表示维数写为

$$D_4^{[3,1]}=D_3^{[3,1]}\oplus D_3^{[2,1]}\oplus D_3^{[1^2]}\oplus D_3^{[3]}\oplus D_3^{[2]}\oplus D_3^{[1]}$$

$$\{45\}=\{15\}\oplus\{8\}\oplus\{3\}\oplus\{10\}\oplus\{6\}\oplus\{3\}$$

8—2　不可约表示的直积约化

本章§4.5曾讨论了置换群不可约表示的外积约化。对于$GL(N,C)$群，它的所有不可约表示都是具有确定对称型的张量表示，故可藉助于 S_K 群的外积约化的同样方法和步骤来约化线性群两个不可约表示的直积。不过值得注意的是 $GL(N,C)$群的不可约张量表示相应的杨氏图行数$\leqslant N$，因此，要将直积分解后所有行数$>N$ 的杨氏图全部去掉。

定理：若 $D_N^{[\lambda_1]}$ 和 $D_N^{[\lambda_2]}$ 是 $GL(N,C)$群的两个不可约表示(〔λ_1〕和〔λ_2〕分别为包含 n_1 和 n_2 个方格的杨氏图)，则其直积表示可约化为不可约表示 $D_N^{[\lambda]}$ 之直和。即

$$D_N^{[\lambda_1]} \otimes D_N^{[\lambda_2]} = \sum_{[\lambda]}^{(t)} a_{[\lambda]} D_N^{[\lambda]} \qquad (4.8.2)$$

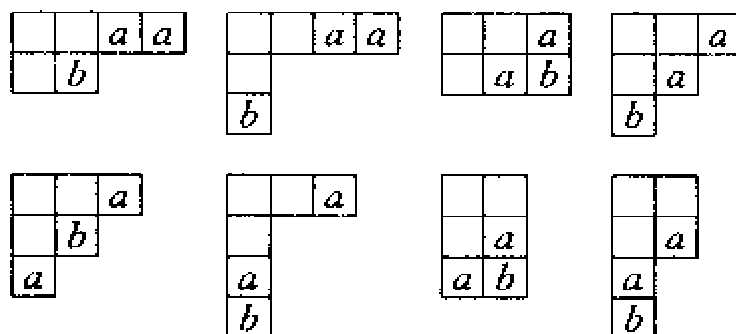
该式中右边各项中的杨氏图[λ]与置换群 S_{n_1} 和 S_{n_2} 相应的不可约表示 $D^{[\lambda_1]}$ 和 $D^{[\lambda_2]}$ 的外积约化式(4.5.2)中包含的杨氏图[λ]完全一样，且 $a_{[\lambda]}=d_{[\lambda]}$。但在(4.8.2)式中要去掉行数$>N$ 的那些杨氏图。这里每个不可约表示的维数将由§4.7的公式给出，且两边维数相等。

$$r_N^{[\lambda_1]} \cdot r_N^{[\lambda_2]} = \sum_{[\lambda]} a_{[\lambda]} r_N^{[\lambda]} \qquad (4.8.3)$$

方程(4.8.3)可用来初步验证约化结果是否正确。

例1 约化 $GL(3,C)$ 群的两表示 $D_3^{[2,1]}$ 和 $D_3^{[2,1]}$ 的直积。

按照置换群不可约表示外积的约化规则，先画出两个表示的杨氏图，并在"乘数"方格图上第一行方格内标上字母"a"。第二行方格内标上字母"b"…；再按约定搬这些带字母的方格到"被乘数"方格图上，故可得到以下一组新杨氏图：



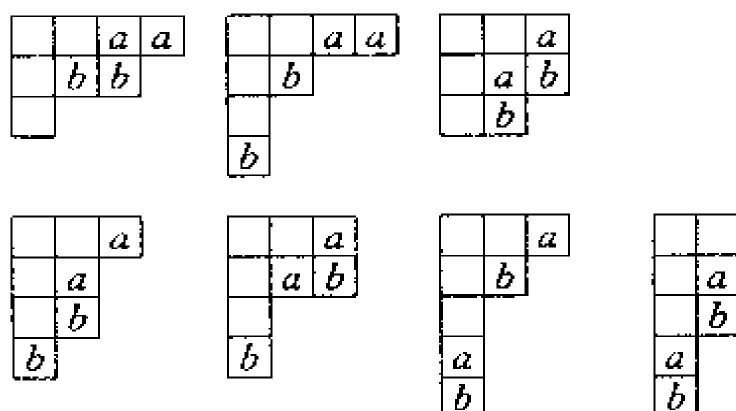
若对置换群外积而言，将包含 S_6 群的8个不可约表示；然而对于 $GL(3,C)$ 群，配分$[3,1^3]$和$[2^2,1^2]$对应的不可约表示并不存在，故最后结果为

$$D_3^{[2,1]} \otimes D_3^{[2,1]} = D_3^{[4,2]} \oplus D_3^{[4,1^2]} \oplus D_3^{[3^2]} \oplus 2 \cdot D_3^{[3,2,1]} \oplus D_3^{[2^3]},$$

$$\{8\} \otimes \{8\} = \{27\} \oplus \{10\} \oplus \{10\} \oplus 2 \cdot \{8\} \oplus \{1\}$$

例2 约化 $GL(4,C)$ 群的直积表示 $D_4^{[2,1^2]} \otimes D_4^{[2^2]}$。

按照上述同样步骤，立即得到该直积表示所包含的全部杨氏图为



除去最后两个 5 行杨氏图外，其余的五个杨氏图都是这两个不可约表示所包含 $GL(4,C)$ 群的不可约表示，故结果为

$$D_4^{[2,1^2]} \otimes D_4^{[2^2]} = D_4^{[4,3,1]} \oplus D_4^{[4,2,1^2]} \oplus D_4^{[3^2,2]} \oplus D_4^{[3,2^2,1]} \oplus D_4^{[3^2,1^2]},$$

$$\{15\} \otimes \{20\} = \{175\} \oplus \{45\} \oplus \{45\} \oplus \{15\} \oplus \{20\}$$

§4.9 一般线性群不可约张量表示与其子群 $SL(N,C)$，$GL(N,R)$，$SL(N,R)$，$U(N)$和 $SU(N)$的关系

$GL(N,C)$群的 K 秩张量表示 $D_N^{\otimes K}$ 可约化为该群的一组不可约 K 秩张量表示 $D_N^{[\lambda]}$ 的直和。对于其子群 $SL(N,C)$，$GL(N,R)$，$SL(N,R)$，$U(N)$和 $SU(N)$等，要求它们的不可约表示，也可利用类似方法：即利用这些子群的矢量表示得到 K 秩张量表示，再利用 S_K 群的杨氏算子约化为若干不可约张量。另一种作法是将已知的 $GL(N,C)$群的各种不可约张量表示 $D_N^{[\lambda]}$ 限制在其各种子群上，从而得到子群的表示，但首先需要证明这样得到的表示是否必定是子群的不可约表示。

定理 1：$GL(N,C)$群的不可约张量表示 $D_N^{[\lambda]}$ 限制在其子群 $GL(N,R)$，$SL(N,R)$，$U(N)$和 $SU(N)$等上时仍是不可约的。

证明：设 D 是由 K 秩张量表示约化出来的 r 维不可约表示，群元 $A \in GL(N,C)$的相应表示矩阵为

$$D(A)=\begin{bmatrix} D_{11}(a_{ij}) & D_{12}(a_{ij})\cdots D_{1r}(a_{ij}) \\ D_{21}(a_{ij}) & D_{22}(a_{ij})\cdots D_{2r}(a_{ij}) \\ \vdots & \vdots \quad\quad\quad \vdots \\ D_{r1}(a_{ij}) & D_{r2}(a_{ij})\cdots D_{rr}(a_{ij}) \end{bmatrix} \tag{4.9.1}$$

其中 $D_{kr}(a_{ij})$是 A 的矩阵元 a_{ij}的 K 次多项式。如果考虑上述的某个子群，它是由 $GL(N,C)$中的矩阵子集 S 所构成。假若相对于这个子群表示 D 是可约的，那末对应 D 的表示空间中就应存在这样的基底，使之所有子群元素 S 都有一定数目，且位于同行列的多项式 $D_{kr}(a_{ij})$都为零(但因 D 是 $GL(N,C)$的不可约表示，故对所有群元 A 决非如此)，下面让我们相继检验一下限制在这些子群上的表示矩阵是否能有这样的特征。

1° $SL(N,C)$：由于任意非奇异矩阵 $A\in GL(N,C)$都可写成如下形式

$$A=(\det A)^{1/N}S$$

其中，$S\in SL(N,C)$。对应表示 D，则有

$$D_{kr}(a_{ij})=D_{kr}[(\det)^{1/N}S_{ij}]=(\det A)^{K/N}D_{kr}(S_{ij}), \tag{4.9.2}$$

由(4.9.2)式可判断，若对于任意子群元素 S 都有 $D_{kr}(S_{ij})=0$，则对于任意群元 $A\in GL(N,C)$必定有 $D_{kr}(a_{ij})=0$，这就是说 D 将是 $GL(N,C)$的可约表示。这与前题相矛盾，故 $GL(N,C)$的任意不可约张量表示限制于子群 $SL(N,C)$上也是不可约的。

2° $GL(N,R)$：人所共知，对于任意的变量多项式，若取其变量的一切实数值时都使该多项式等于零，则此多项式只能恒为零。这表明，若 $GL(N,C)$的某个表示限制在子群 $GL(N,R)$上是可约的，则它必定也是 $GL(N,C)$的可约表示。显然对子群 $SL(N,R)$也有同样结论。

3° $U(N)$：由条件(4.1.1)式可推得无穷小的么正变换可写成

$$U=1+\alpha\tau \tag{4.9.3a}$$

其中 α 为无穷小实数，而 τ 是 N 维反厄米矩阵($\tau^{+}=-\tau$)。类似

地，对于无穷小线性变换 $A\in G(N,C)$，

$$A=1+\gamma\tau \tag{4.9.3b}$$

这里 γ 是无穷小复数。由于 $GL(N,C)$ 群的任何有限变换都可视为无数个无穷小连续变换的结果，故其任意不可约表示对于该群的无穷小变换也是不可约的。由此可推断，不论 γ 是实数还是复数，无穷小变换多项式 $D_{kr}(a_{ij})$ 都不可能恒为零。故 $GL(N,C)$ 的不可约表示相对于子群 $U(N)$ 上也是不可约的。该结论对于子群 $SU(N)$ 也成立。

根据定理 1，要想求子群 $GL(N,R)$，$SL(N,C)SL(N,R)$，$U(N)$ 和 $SU(N)$ 等的不可约表示，可从群 $GL(N,C)$ 的不可约张量表示 $D_N^{(\lambda)}$ 出发，然后只将 $D_N^{(\lambda)}$ 限制在这些子群上就可得到各个子群相应的不可约表示。自然，表示 $D_N^{(\lambda)}$ 的维数公式，分支律和直积约化规律等对于这样得到的子群不可约表示也是完全适用的。

我们曾指出，不同的杨氏图对应着置换群的不等价不可约表示，而对线性群这个结论是否正确呢？首先考虑线性群的 N 秩完全反对称张量表示 $D_N^{(1^N)}$，对于群元 $A\in GL(N,C)$，这个反对称张量只有一个分量为 $T_{1,2,\cdots,N}$，它的线性变换为

$$T'_{1,2,\cdots,N}=D_N^{(1^N)}T_{1,2,\cdots,N} \tag{4.9.4}$$

然而按照 N 秩张量的变换规律又可写为

$$T'_{1,2,\cdots,N}=\sum_{i_1}\sum_{i_2}\cdots\sum_{i_N}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{Ni_N}T_{i_1i_2\cdots i_N} \tag{4.9.5}$$

因为 N 秩完全反对称张量只有一个独立分量，故有

$$T_{i_1i_2\cdots i_N}=\epsilon_{i_1i_2\cdots i_N}=\begin{cases}1,(i_1,i_2,\cdots,i_N)\text{为}(1,2,\cdots,N)\text{偶排列}, \\ -1,(i_1,i_2,\cdots,i_N)\text{为}(1,2,\cdots,N)\text{奇排列}\end{cases}$$

于是，(4.9.5)式可改写为

$$\begin{aligned}T_{1,2,\cdots,N}&=\sum_{i_1}\sum_{i_2}\cdots\sum_{i_N}\epsilon_{i_1i_2\cdots i_N}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}T_{1,2,\cdots,N} \\ &=(\det A)T_{1,2,\cdots,N}\end{aligned} \tag{4.9.6}$$

比较(4.9.4)和(4.9.6)式可推得

$$D_N^{[1^N]}(A)=\det A \tag{4.9.7}$$

如果推广这个结果，对于配分$[2^N]$对应的 $2N$ 秩张量，则有

$$D_N^{[2^N]}(A)=(\det A)^2$$

而配分为$[m^N]$(m 为正整数)型的 mN 秩张量，其线性变换矩阵也只是个常数，即

$$D_N^{[m^N]}(A)=(\det A)^m \tag{4.9.8}$$

设 $D_N^{[\lambda]}$ 和 $D_N^{[\lambda']}$ 分别是 $GL(N,C)$的 K 秩和$(K+N)$秩不可约张量表示，其中$[\lambda]=[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N]$，$[\lambda']=[\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots,\lambda_N+1]$。表示 $D_N^{[\lambda']}$ 比 $D_N^{[\lambda]}$ 对应的杨氏图左边多出单列 N 个方格，当将头 N 个自然数填入这 N 个方格时，只有一种标准填法，故这两个不可约表示的标准分量盘数相同，即两者是同维表示。根据(4.9.7)式，它们的线性变换矩阵应满足关系

$$D_N^{[\lambda']}(A)=(\det A)D_N^{[\lambda]}$$

而对于左边多出 m 列，每列有 N 个方格的杨氏图所对应的$(K+mN)$秩张量，其表示维数也一样，它们的线性变换关系为

$$D_N^{[\lambda_1+m,\lambda_2+m,\lambda_N+m]}(A)=(\det A)^m D_N^{[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N]}(A) \tag{4.9.9}$$

如果只限于讨论 $GL(N,C)$的幺模子群 $SL(N,C)$，$SL(N,R)$ 和 $SU(N)$，由于其 $\det A=1$，则(4.9.9)式将变为

$$D_N^{[\lambda_1+m,\cdots,\lambda_N+m]}(A)=D_N^{[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N]}(A) \tag{4.9.10}$$

由此可得到如下结论。

定理 2：幺模线性群 $SL(N,C)$，$SL(N,R)$和 $SU(N)$的不可约张量表示 $D_N^{[\lambda_1+m,\cdots,\lambda_N+m]}$ 和 $D_N^{[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N]}$，限制在各自幺模群上是完全等同的不可约表示。

这个定理告诉我们，对于幺模线性群，除了杨氏图$[1^N]$对应的 1 维完全反对表示外，只需讨论行数$\leqslant N-1$ 的杨氏图所标记的不可约张量表示。而对包含 N 行的多列杨氏图，可将有 N 行方格的各列划掉。

§4.10 幺模群的逆步张量表示和 $SU(N)$群的有限维不可约表示

10—1 幺模群的对偶表示与逆步张量表示

若 D 是 G 群的一个表示，则 D^*（复数共轭），$(\tilde{D})^{-1}$（逆转矩阵）和$(D^+)^{-1}$（逆厄米矩阵）也是G 的表示。对于一般的群，表示 D 与$(\tilde{D})^{-1}$是不等价的，而对 $SL(N,C)$群，由(4.9.7)式可知，配分$[1^N]$对应着幺模群的恒等表示，即

$$D_N^{[1^N]}(A)=\det A=1 \tag{4.10.1}$$

已知配分$[1]$是 $SL(N,C)$群的 N 维自然表示，则由上式可断定配分$[1^{N-1}]$对应着自然表示 $D^{[1]}$的逆表示，这也是个 N 维表示，其对应的表示空间称之自然表示空间 V_N 的对偶空间，并以 $\overline{V}_N$ 标记。这就是说，N 维对偶空间的矢量对应着张量空间 $V_N^{\otimes[1^{N-1}]}$ 中的$(N-1)$秩反对称张量，且是一一对应的。设 $\Phi\in\overline{V}_N$，$\Phi_i(i=1,2,\cdots,N)$是 Φ 的 N 个分量；若 $x\in V_N$，其分量为 $x^j(j=1,2,\cdots,N)$，则有

$$\Phi_{i_1}=\epsilon_{i_1 i_2\cdots i_N}x_2^{i_2}x_3^{i_3}\cdots x_N^{i_N} \tag{4.10.2}$$

按照杨氏图方法，可将 $SL(N,C)$群的这种等价性表示为

$$\blacksquare \approx \left.\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline \vdots \\ \hline \\ \hline\end{array}\right\} N-1\ 个方格 \tag{4.10.3}$$

同理可证明(4.10.4)式的两个单列杨氏图所标记的不可约张量表示的等价性，通常称这个 P 秩反对称张量为$(N-P)$秩反对称张量的对偶（或伴随）张量，它俩包含着相同个数的独立分量。

p 个方格 [阴影列] $\approx$ [空白列] $\Big\}$ $N-p$ 个方格　　　　(4.10.4)

由此可见，$SL(N,C)$群的不可约表示所对应的杨氏图，不仅包含 N 个方格的列皆可去掉，而且从横向有 λ_1 个方格竖向有 N 个方格所构成的矩形中去掉配分$[\lambda]=[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{N-1}]$对应的方格图，余下部分即为该表示的逆步张量表示的杨氏图，它的配分为$[\lambda']=[\lambda_1,\lambda_1-\lambda_{N-1},\lambda_1-\lambda_{N-2},\cdots,\lambda_1-\lambda_2]$，$D_N^{[\lambda]}$ 和 $D_N^{[\lambda']}$ 是 $SL(N,C)$群的互为等价的同维表示。图 4.4 给出 $N=5$ 时的两个互为逆步表示 $D_5^{[7,5,4,1,0]}$ 和 $D^{[7,6,3,2,0]}$。

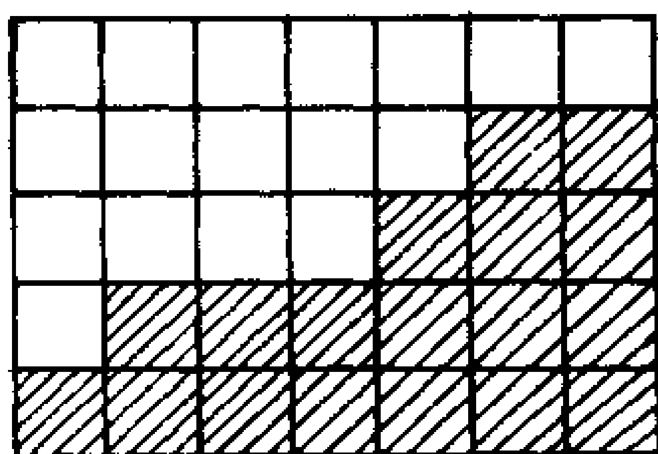


图 4.4

这里必须指出，虽然自然表示□和其对偶空间 $\overline{V}_N$ 中的矢量表示▨是同维的，但它们是分属两种不同性质的空间，一般说来它们是不等价的。当研究它们之间的直积约化时，必须在同一空间 V_N 及其张量空间内来进行。

10—2　$SU(N)$群的有限维不可约表示

在原子物理、粒子物理和大统一理论中，$SU(N)$群得到广泛应用，它也是上述线性子群中唯一的紧致群。由于它在物理应用上

的特别重要性，这里有必要对它的有限维不可约表示及其通用的记号专门作些介绍。

设 $D^{(\lambda)}$ 为 $SU(N)$ 的 K 秩张量 r 维表示，如果它的逆步表示 $D^{(\lambda')}$ 对应的杨氏图方格数 $K'\geqslant K$，则可直接以表示维数 r（或$\{r\}$）来标记这个表示，而以 $\bar{r}$（或$\{\bar{r}\}$）来标记它的逆步表示 $D^{(\lambda')}$。如果同时有几个表示维数都是 r，且又不是互为逆步表示，则可用$\{r\}$，$\{r'\}$，$\{r''\}$等来分别标记这些不同的 r 维表示。

例如，$SU(2)$ 群可能存在的不可约张量表示的杨氏图只有 $\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}$ 和单行图。前者是 1 维恒等表示；而有 K 个方格单行图的表示维数为 $r_2^{(K)}=K+1$；$SU(3)$ 群的不可约表示只有 3 个方格的单列杨氏图和各种不超过两行的方格图，$[1^3]$ 是 $SU(3)$ 的 1 维恒等表示；单行 K 个方格图是该群的 $r_3^{(K)}=\frac{1}{2}(K+1)(K+2)$ 维表示；而配分 $[\lambda_1,\lambda_2]$ 对应的两行杨氏图，其不可约表示维数由鲁宾孙公式不难求得

$$r_3^{(\lambda_1,\lambda_2)}=\frac{1}{2}(\lambda_1+2)(\lambda_2+1)(\lambda_1-\lambda_2+1) \tag{4.10.5}$$

若以 p_1 和 p_2 分别代表包含一个方格和二个方格的列数，则有 $\lambda_1=p_1+p_2$，$\lambda_2=p_2$，故(4.10.5)式又写为更便于记忆的形式：

$$r_3^{(\lambda_1,\lambda_2)}=r_3^{(p_1,p_2)}=\frac{1}{2}(p_1+p_2+2)(p_1+1)(p_2+1) \tag{4.10.6}$$

由方程(4.10.6)不难看出，表示 $D^{(p_2,p_1)}$ 是 $D^{(p_1,p_2)}$ 的逆步表示，且 $r_3^{(p_2,p_1)}=r_3^{(p_1,p_2)}$。

若配分 $[\lambda]=[\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3]$ 为 $SU(4)$ 群不可约表示杨氏图，令 $p_1=\lambda_1-\lambda_2$，$p_2=\lambda_2-\lambda_3$，$p_3=\lambda_3$，不难证明其表示维数为

$r_4^{(\lambda)}=r_4^{(p_1,p_2,p_3)}$

$$=\frac{(p_1+1)(p_2+1)(p_3+1)(p_1+p_2+2)(p_2+p_3+2)(p_1+p_2+p_3+3)}{1\cdot 1\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 3} \tag{4.10.7}$$

类似地可推得 $SU(N)$ 群不可约表示 $D_N^{(\lambda)}$ 的维数公式。但当 N 很大时，实际用起来并不及鲁宾孙公式简便，这里不再写出。表 4.4 以不同标记列出 $SU(3)$ 和 $SU(4)$ 群的几个低维不可约张量表示。

表 4.4

$SU(3)$			$SU(4)$		
(p_1,p_2)	$r_3^{(p_1,p_2)}$	杨氏图	(p_1,p_2,p_3)	$r_4^{(p_1,p_2,p_3)}$	杨氏图
(0,0)	1		(0,0,0)	1	
(1,0)	3		(1,0,0)	4	
(0,1)	$\bar{3}$		(2,0,0)	10	
(2,0)	6		(0,1,0)	6	
(1,1)	8		(3,0,0)	20	
(3,0)	10		(1,1,0)	20	

最后还需指出，对 $SU(N)$ 群的不可约表示约化时，如果其中一个是对偶空间 $\overline{V}_N$ 中的张量表示，则要先将它化为 V_N 型张量空间张量后，再按照一般规则进行约化。例如，

$$\otimes \quad = \quad N-1\left\{\quad\right. \otimes \quad = \quad N\left\{\quad\right. \oplus N-1\left\{\quad\right.$$

或者简化为

$$\{\overline{N}\}\otimes\{N\}=\{1\}\oplus\{N^2-1\} \tag{4.10.8}$$

方程(4.10.8)可视为 $SU(N)$ 群伴随表示的定义，它是个 N^2-1 维不可约表示，在粒子物理中有特殊的作用，在以后 $SU(N)$ 群的应用中再详细讨论。

习 题 四

4—1 证明由可约幂等元生成的左理想是可约的。

4—2 设 E 为群 G 的单位元素，e 为群代数 $A(G)$ 的原始幂等元，证明 $e'=E-e$ 也是个幂等元，且由 e 和 e' 生成的两个左理想 $\xi_1=A(G)e$ 和 $\xi_2=A(G)e'$ 是相互独立的。

4—3 若幂等元 e 和群代数中的任意元素 x 都满足 $exe=\beta_x e$，(β_x 是与 x 有关的复数)，则 e 必为原始幂等元。

4—4 设 e_1 和 e_2 是两个非零幂等元，且满足 $e_1\cdot e_2=\Phi_0$，$e_2\cdot e_1\neq\Phi_0$（Φ_0 为空集），试证明由 e_1 和 e_2 生成的左理想是独立的。试问 e_1 和 e_2 能否为单位元素 E 在两个左理想中的分量？

4—5 写出杨氏盘 $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$ 和 $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&5\\\cline{1-2}\end{array}$ 的杨氏算子，并验证它们是原始幂等元。

4—6 写出杨氏图 $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \ &\ &\ &\ \\\hline \ &\ \\\cline{1-2}\end{array}$ 和 $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \ &\ &\ \\\hline \ &\ &\ \\\hline\end{array}$ 的所有标准杨氏盘，并验证其不可约表示维数。

4—7 试计算 S_4 群不可约表示[3,1]的各个群元的表示矩阵。

4—8 计算置换群以下不可约表示的各类群元的特征标：

(a)$X^{[4,2]}_{(2^3)}$，　(b)$X^{[3^2,1^2]}_{(8)}$，　(c)$X^{[5,2,1]}_{(3,2,1^3)}$，

(d)$X^{[4,3,1^2]}_{(3,2^2,1^2)}$，　(e)$X^{[6,2,1^2]}_{(5,4,1)}$，　(f)$X^{[8,1^2]}_{(3,2^3,1)}$，

4—9 证明置换群 S_n 相应配分 $[p,1^q]$ 对应的不可约表示中，配分 $[n]$ 的类元素的特征标为 $(-1)^q$，其中 $p+q=n$，$q=0,1,2,\cdots,n-1$。

4—10　试导出置换群特征标的下列公式：

(a) $\chi^{[n-1,1]}_{(1^\alpha,2^\beta,3^\gamma,\cdots)}=\alpha-1$，

(b) $\chi^{[n-2,1^2]}_{(1^\alpha,2^\beta,3^\gamma,\cdots)}=\dfrac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2}-\beta$，

(c) $\chi^{[n-2,2]}_{(1^\alpha,2^\beta,3^\gamma,\cdots)}=\dfrac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2}+\beta-1$

4—11　约化置换群以下不可约表示的外积，并标出其表示维数：

(a) $[2,2]\overset{\circ}{\times}[2,1]$　　(b) $[2]\overset{\circ}{\times}[2]\overset{\circ}{\times}[1]$

(c) $[1^4]\overset{\circ}{\times}[4]$　　(d) $[1^4]\overset{\circ}{\times}[1^2]\overset{\circ}{\times}[1]$

4—12　$GL(5,C)$群的 4 秩张量空间可约化为哪些不变张量子空间，其子空间维数各为多少？

4—13　由普通张量$T_{i_1i_2i_3i_4}$，写出[3，1]对称型张量的具体形式。

4—14　写出$GL(4,C)$群的杨氏图[3]和[2，1]的标准分量盘。

4—15　分别求$GL(4,C)$群不可约张量表示$D_4^{[4,2,1^2]}$和$D_4^{[2,1^2]}$相对于$GL(3,C)$群上的分解式，并核对维数。

4—16　约化$GL(3,C)$群的直积表示$D_3^{[1,1]}\otimes D_3^{[3,1]}$，并核对维数。

4—17　证明幺模线性群对应配分$[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{N-1},0]$和$[\lambda_1,\lambda_1-\lambda_{N-1},\cdots,\lambda_1-\lambda_2,0]$的两个表示维数相等。

4—18　若以正整数组$p_1=\lambda_1-\lambda_2,p_2=\lambda_2-\lambda_3,\cdots,p_{N-1}=\lambda_{N-1}$代替配分$[\lambda]=[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{N-1}]$来标征$SU(N)$群不可约表示，试用鲁宾孙公式导出类似(4.10.7)式的一般维数表达式。

4—19　约化$SU(3)$群的直积表示$D_3^{[4,2]}\otimes D_3^{[3,1]}$，并核对维

数。

4—20　约化 $SU(6)$ 群的直积表示 $D^{[4,2]} \otimes D^{[3,1]}$，并比较与上题的差别。

4—21　约化 $SU(4)$ 群的直积表示 $\{\overline{4}\} \otimes \{6\}$。

第五章　李群和李代数

前三章已研究了有限群及其表示的性质，其基本概念对于无限群也是适用的。第四章中曾借助于置换群和张量讨论了各种经典群及其不可约张量表示。这些经典群都是连续群或李群，不论在原子物理、分子物理和核物理中，还是在固体物理和粒子物理理论中，李群和李代数的概念更为重要。本章将从实用的角度出发，只给出李代数的基本性质，有些概念的阐述也许不十分严格，但就大部分目的而言，这些讨论将是必要和适用的。所列举的实例不仅有益于对基本概念加深理解，还可引导我们正确地用群论方法去研究一些具体物理问题。为了借助解析函数和偏微分方程来研究连续群，有必要先讨论拓扑和流形的某些基本概念。

§5.1　拓扑初步

1—1　拓扑和拓扑空间

设 T 是个点集，若能在 T 上选取一个特定的子集组 $\Gamma=\{S_i\}$，$S_i\subset T$，$S_i\in\Gamma$，使之以下条件成立：

T1. 空集 Φ_0 和 T 皆是 Γ 的元素。即

$$\Phi_0\in\Gamma, T\in\Gamma$$

T2. 任何有限个属于 Γ 的元素的交集仍是 Γ 的元素。即若 $S_i\in\Gamma$，$i=1,2,\cdots,k$（k 是个有限正整数），则

$$\bigcap_{i=1}^{k}S_i=S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_k\in\Gamma。$$

T3. 任意几个属于 Γ 之元素的并集仍是 Γ 的元素。即

$$\bigcup_{i=1} S_i \in \Gamma$$

则称 Γ 为 T 的一个拓扑，而称 $\langle T, \Gamma \rangle$ 这个有序对为一个拓扑空间。

假定 $X = \langle T, \Gamma \rangle$ 是个拓扑空间，那末 T 的每个元素为 X 中的一点，T 的每个子集称之 X 中的点集，而 Γ 的每个元素 S_i 是 T 中的特殊子集，S_i 是 X 内的开集，Γ 是 X 的拓扑。在不至于引起误解的情况下，有时可略去 Γ，而单纯以 T 来代表拓扑空间。除了以上三个条件外，设 p 和 q 为 T 中任意两个不同点，若能找到分别包含 p 和 q 两点的开集 S_p 和 S_q，且其交集为空集，以符号代表则为

T4. 如果 $p \in T, q \in T, p \neq q$，可找到 $S_p \in \Gamma, S_q \in \Gamma$，且满足 $p \in S_p, q \in S_q, S_p \cap S_q = \Phi_0$。

则称满足以上四个条件的拓扑空间为豪斯道夫(Hausdorff)空间，而条件 T4 又称之豪斯道夫分离公理。

例 1　设点集 $T = \{a, b, c\}$，若令 $\Gamma = \{\Phi_0, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$，则不难看出 Γ 是 T 的一个离散拓扑，而 $X = \langle T, \Gamma \rangle$ 是个拓扑空间，但它并不是豪斯道夫空间。

例 2　设 T 为某个非空点集，若令 $\Gamma = \{\Phi_0, T\}$；显然 Γ 是 T 的一个拓扑，$\langle T, \Gamma \rangle$ 也是个拓扑空间，称它为平凡拓扑空间。

例 3　设 R_2 是二维平面的全部点集，在 R_2 上选取一族圆内的子集 S_i，而这些圆有任意圆心和非零半径，则点集 R_2 的这个拓扑将由全部子集 S_i，及其有限个子集的交集和任意个子集的并集所构成。如果代替这些圆，而取一些有任意中心和边长的正方形作为其子集，则产生 R_2 的另一种拓扑。设 $d(p, q)$ 为 p 和 q 两点间距离，则分别以这两点为圆心，$\frac{1}{3}d(p, q)$ 为半径作圆 S_p 和 S_q，都有 $S_p \cap S_q = \Phi_0$，故 R_2 是个豪斯道夫空间。

如果 T 是个拓扑空间，若由点 $t_1, t_2, \cdots (t_i \in T)$ 构成的每个无

穷序列都包含一个收敛于 T 内某个点的子序列，则称 T 为紧致拓扑空间。例如，实轴 R_1 就不是紧致的，因为其上的点无穷序列 $t_i=i, i=1,2,\cdots$ 没有任何收敛的子序列。R_2 上的单位圆周是紧致的，而单位圆内的点集不是紧致的，因为圆内任意点的无穷序列可表为 $t_n=1-\dfrac{1}{n}, n=1,2,\cdots$ 它虽收敛于圆周上某一点，但该点并不是原点集的元素。

若点集 T 还包含它的全部极限点，则称这样的点集为闭集，以 $\overline{T}$ 标记。例如，R_2 上单位圆内的点集连同其圆周上的所有点就是一个闭集。若 $\overline{S}$ 是 T 内的一个封闭子集，则 T 内 $\overline{S}$ 的补集必为开集。这里所谓的补集是 T 内除去 $\overline{S}$ 的全部点集。

设 Φ 是一个映射，它将拓扑空间 $\langle T,\Gamma\rangle$ 变为另一拓扑空间 $\langle U,V\rangle$，如果 $t_i\in T$，则 t_i 的像是拓扑空间 U 的一点 $u_i\in U$，以符号表示则为

$$\Phi:\langle T,\Gamma\rangle\to\langle U,V\rangle,$$

$$\Phi(t_i)=u_i$$

当然，t_i 和 u_i 并不一定是一一对应的，T 内的几个点也可同时映射到 U 中的同一点，若 $t_i\in T(i=1,2,\cdots)$ 都映射到一点 $u\in U$，则称点集 $\{t_i\}$ 为 u 的逆像，记为 $\Phi^{-1}(u)=t_i(i=1,2,\cdots)$. 若 U 内的任一开集的逆像仍是 T 内的一个开集，则称映射 $\Phi:\langle T,\Gamma\rangle\to\langle U,V\rangle$ 是连续映射，以符号表示则为

$$\Phi^{-1}(u)\subset\Gamma, u\subset V$$

设 $\langle T,\Gamma\rangle$ 和 $\langle U,V\rangle$ 是两个拓扑空间，若映射 $\Phi:T\to U$ 是 1—1 的满映射，而且 Φ 与 Φ^{-1} 都是连续映射，则称 Φ 为同胚映射，这样的两个拓扑空间称之同胚拓扑空间。显然，同胚拓扑空间的一切拓扑性质都是一样的。

1—2 解析流形

定义：设 $\langle T,\Gamma\rangle$ 是个豪斯道夫空间，R_n 为 n 维欧氏空间。如果

存在一个从 T 到 R_n 的映射集合 $\Phi=\{\Phi_p\}$，$p\in T$，使之以下四个条件成立，则由$\langle T,\Gamma\rangle$和 Φ 构成一个解析流形 M，可见 M 是一个具有特定映射性质的拓扑空间。

M1，Φ_p 是开集 $T_p(p\in T)$到 R_n 内一个开集的 1-1 映射。

M2，$\bigcup T_p=T$

M3，如果 $T_p\cap T_q$ 是非空子集，那末 $\Phi_p(T_p\cap T_q)$是 R_n 内的一个开集，而 $\Phi_q(T_p\cap T_q)$是 R_n 内与 $\Phi_p(T_p\cap T_q)$不同的另一个开集。且映射 $\Phi_p\cdot\Phi_q^{-1}$ 必是连续和解析的。

M4，映射 $\Phi_p\cdot\Phi_q^{-1}$ 和 $\Phi_q\cdot\Phi_p^{-1}$ 都是映射集合 Φ 的元素。

由性质 M1，我们能在一点 $p\in T$ 的邻域内构造一个坐标系，利用 Φ_p 将 p 映射到 R_n 内一点，并以该点作为 n 维坐标系原点。T 中任何靠近 p 的一点 q 被映射到 R_n 中的 $\Phi_p(q)$点，该点在 R_n 中的坐标分量为 $\Phi_p^i(q)$，$i=1,2,\cdots,n$。显然这组坐标与点 $q\in T$ 相对应。这种对应关系将遍及整个 T 的以某点为原点的定域坐标系。性质 M2 确保定域坐标系可在 T 内任意点上建立起来；M3 涉及映射 $\Phi_p\cdot\Phi_q^{-1}:R_n\to R_n$，既然 R_n 是 n 维欧氏空间，因此这种 R_n 中的自身映射(或变换)可以普通解析方法进行研究。这些性质可用图 5.1 形象表示出来。

图 5.1(a)映射 Φ_p 使点 $p\in T$ 的邻域到 R_n 中原点 $\Phi_p(p)$周围的一个 n 维正方体内，而 p 附近的任一点 $q\in T$ 被 Φ_p 映射到 R_n 中的 $\Phi_p(q)$点，它的坐标为 $\Phi_p^i(q)$，$i=1,2,\cdots,n$。

图 5.1(b)映射 Φ_p 和 Φ_q 将开集 T_p 和 T_q 分别映射到不同定域的 R_n 坐标系中的两个开集，而映射 $\Phi_p\cdot\Phi_q^{-1}$ 和 $\Phi_q\cdot\Phi_p^{-1}$ 为一个定域坐标 R_n 中的开集到另一个定域 R_n 坐标系内的开集。

最后应强调指出，由于流形内的每点附近都是定域的欧氏空间，因此欧氏空间研究时所用的一些概念和方法都可借助于 M1 到 M3 而同样地应用到流形研究中去，而 R_n 的维数即为流形的维

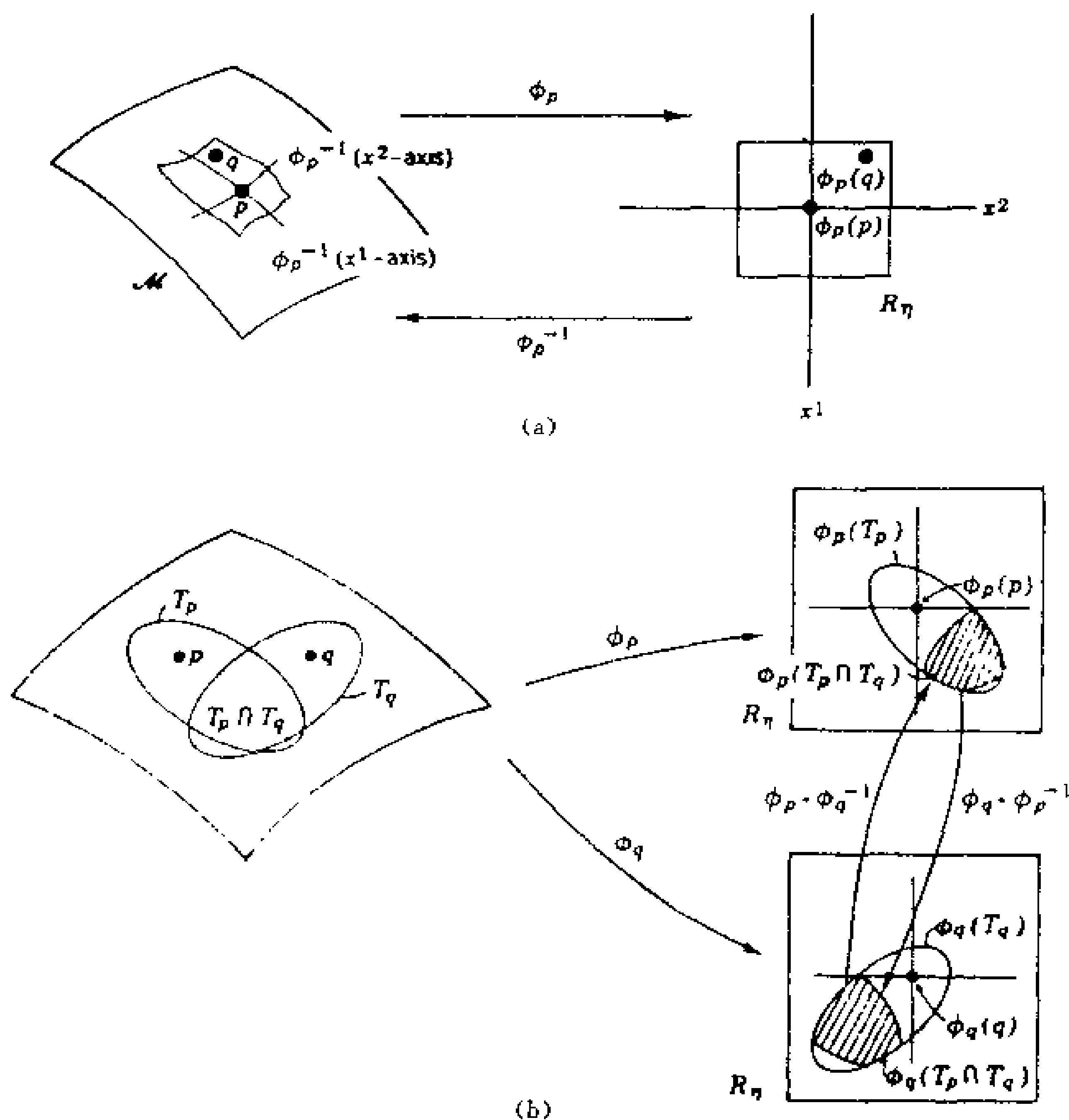


图 5.1 拓扑与流形

数。例如，三维欧氏空间内的单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 是一个 2 维流形。流形的概念对研究连续群是十分有用的，如 $O(3)$ 群的每个群元是一个 3×3 的正交矩阵 A，即每个群元对应 A 的 9 个矩阵元，因此可视 $O(3)$ 群的每个群元为 9 维空间的一点。但由正交群

性质推知它只有三个独立参数，故 $O(3)$ 群流形是 9 维空间中的一个 3 维表面，这个表面的精确大小和严格形状无关紧要，而它的拓扑性质是与此群紧密相关的。一般说来，每个连续群都与某个空间 V_m 的代数表面相联系，而这个表面就是此群的流形——群流形，它的维数即为连续群群元独立参数的个数。

1—3 同伦和同伦群

设 $\langle T,\Gamma\rangle$ 是个拓扑空间，$I=[0,1]$ 是由 0 到 1 的全体实数集。若连续映射 $\alpha: I\to T$ 满足 $\alpha(0)=t_0,\alpha(1)=t_1,t_0,t_1\in T$，则称 α 是一条从 t_0 到 t_1 的"道路"。

在拓扑空间 $\langle T,\Gamma\rangle$ 中，若 T 的任意两点 t_0 和 t_1 都存在一条从 t_0 到 t_1 的道路，则称 $\langle T,\Gamma\rangle$ 为道路连通拓扑空间。

设 α 是从 t_0 到 t_1 的一条道路，β 是从 t_1 到 t_2 的一条道路，则定义道路乘积 $\beta\alpha$ 是从 t_0 到 t_2 的一条道路，其中

$$\beta\alpha(\xi)=\begin{cases}\alpha(2\xi),(0\leqslant\xi\leqslant\frac{1}{2}\\ \beta(2\xi-1),(\frac{1}{2}\leqslant\xi\leqslant1)\end{cases}\tag{5.1.1}$$

而 α 的逆道路 α^{-1} 是从 t_1 到 t_0 的道路，其中

$$\alpha^{-1}(\xi)=\alpha(1-\xi)$$

不难看出，这样定义的 $\beta\alpha$ 也是 $I\to T$ 的连续映射。

定义：设 α 和 β 是从 t_0 到 t_1 的两条道路，如果存在一个连续映射 $F: I\otimes I\to T$，使得

$$F(\xi_1=0,\xi_2)=t_0,F(\xi_1=1,\xi_2)=t_1$$

$$F(\xi_1,\xi_2=0)=\alpha(\xi_1),F(\xi_1,\xi_2=1)=\beta(\xi_1)$$

则称 α 与 β 是同伦的，记为 $\alpha\simeq\beta$。连续乘积映射 F 称之从 α 到 β 的伦移，参看图 5.2。关于道路同伦有以下四个定理：

定理 1：道路同伦是一种等价关系，即(1) $\alpha\simeq\alpha$。(2)若 $\alpha\simeq\beta$，

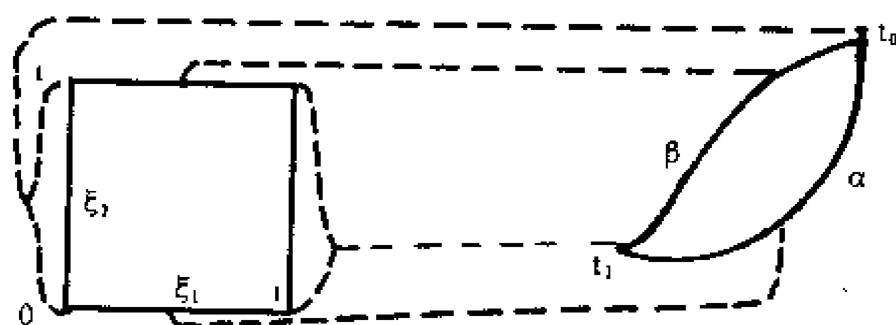


图 5.2 道路 α 和 β 同伦

则$\beta \backsimeq \alpha$。(3)若 $\alpha \backsimeq \beta$，$\beta \backsimeq \gamma$，则 $\alpha \backsimeq \gamma$。

定理 2：如果 $\alpha_1 \backsimeq \alpha_2$，$\beta_1 \backsimeq \beta_2$，且 $\alpha_1\beta_1$ 有定义，则 $\alpha_2\beta_2$ 也有意义，而且 $\alpha_1\beta_1 \backsimeq \alpha_2\beta_2$。

定理 3：若 $\alpha_1 \backsimeq \alpha_2$，则 $\alpha_1^{-1} \backsimeq \alpha_2^{-1}$。

从同伦定义可知，若两条有共同起点和终点的道路同伦，就存在一种连续变更的方式，如同一条不断变形的橡皮筋，从一条道路逐渐重合于另一条道路。在普通的欧氏空间中，一切有相同始点和终点的曲线(道路)都是同伦的，但是，空间内有一条直线作为割线，它就不再是连通的。如果你熟识电磁学的安培环路定理，就容易理解它。在通电直导线周围，环路可取任意形状，这些环绕导线的环路都是同伦的，正如同一个圆皮筋可不断变形，从一个环路变到另一个环路，但无论如何变形也无法绕过这根无限长载流导线。

按照(5.1.1)式道路乘积的定义，考虑始点＝终点＝$x_0 \in T$ 的闭合道路，而只由一点 x_0 构成的“闭合”道路称之零道路，任何与零道路同伦的道路称之零同伦。

令$\langle\alpha\rangle$代表与道路 α 同伦的一切道路集合，称之一个同伦类，显然同伦类$\langle\alpha\rangle$的一切道路的始终点都相同，且可相互连续映射。两个同伦类乘积定义为

$$\langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle = \langle\alpha\beta\rangle,(\alpha\beta\ 有意义) \tag{5.1.2a}$$

而同伦类$\langle\alpha\rangle$的逆$\langle\alpha\rangle^{-1}$定义为

$$\langle\alpha\rangle^{-1} = \langle\alpha^{-1}\rangle \tag{5.1.2b}$$

设$\langle T,\Gamma\rangle$是个拓扑空间，则全体始点＝终点＝$x_0\in T$的道路集合将形成若干同伦类，若以(5.1.1)定义的道路乘积和逆道路分别作为群的乘法和逆运算，显然这些同伦类的道路集将构成一个群，称此群为拓扑空间$\langle T,\Gamma\rangle$的以x_0为基点的基本群。零道路是基本群的单位元素，而对每个道路x_0xyx_0都有条逆道路x_0yxx_0存在。任何两道路乘积仍是某个道路同伦类，自然结合律也成立，通常又称基本群为1维同伦群，并记为$\Pi_1(T,x_0)$。

定理4：设$\langle T,\Gamma\rangle$是连续拓扑空间，而$t_0,t_1\in T$是任意两点，则$\Pi_1(T,t_0)$和$\Pi_1(T,t_1)$同构。

该定理说明，与连通拓扑空间相联系的一个抽象群是以其任意点为基点的基本群。通过多重乘积映射可将基本群的概念推广到一般同伦群，虽然本书在讨论李群时并未直接涉及到它，但在粒子物理理论中常常会碰到这个抽象的拓扑概念。

设T是拓扑空间，而I^n是个边长为1的n维方体的点集，即

$$I^n=\{(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in E^n|0\leqslant t_i\leqslant 1,i=1,2,\cdots,n\}$$

如果映射f和$g:I^n\to T$，并满足$f(1,t_2,\cdots,t_n)=g(0,t_2,\cdots,t_n)$，则可由$f$和$g$定义一个粘接映射或和映射$h:I^n\to T$，

$$h(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\begin{cases}f(2t_1,t_2,\cdots,t_n),0\leqslant t_1\leqslant\frac{1}{2}\\ g(2t_1-1,t_2,\cdots,t_n),\frac{1}{2}\leqslant t_1\leqslant 1\end{cases}\tag{5.1.3}$$

并以"＋"作为代数运算来代表f与g的和映射h，记为$h=f+g$，并参看图5.3。

若取T中某定点x_0作为基点，而子集$\triangle I^n\subset I^n$是这个n维方体的边界点集，即$\triangle I^n=\{(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in I^n\mid\prod_{i=1}^{n}t_i(1-t_i)=0\}$。如果$M_n(T,x_0)$是一切映射$f:I^n\to T$和$\triangle I^n\to x_0$的集合，即

$$M_n(T,x_0)=\{f|f:(I^n,\triangle I^n)\to(T,x_0)\}$$

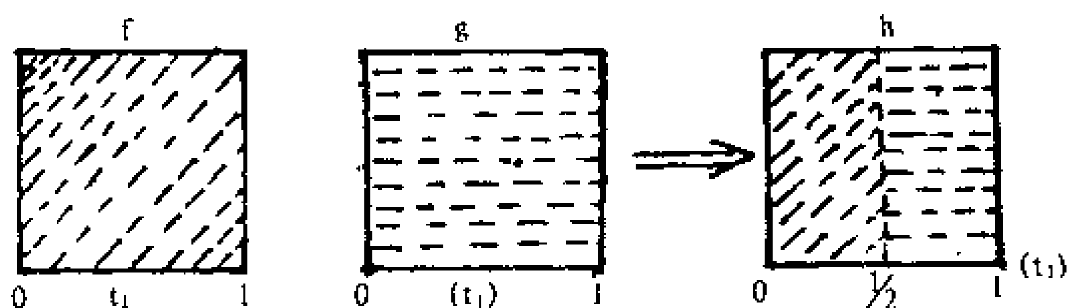


图 5.3 f 与 g 的粘接映射

$M_n(T,x_0)$中映射 f 与 g 的同伦关系为 $f\simeq g:(I^n,\triangle I^n)\to(T,x_0)$，令 $\Pi_n(T,x_0)$为 $M_n(T,x_0)$中一切同伦映射的集合，若以(5.1.3)式定义的代数运算"＋"作为同伦类 $\Pi_n(T,x_0)$中道路的乘法运算，则可以证明该同伦类将构成一个群，称 $\Pi_n(T,x_0)$为以 x_0 为基点拓扑空间 T 的第 n 个同伦群(或 n 维同伦群)。当 $n\geqslant 2$ 时，$\Pi_n(T,x_0)$总是阿贝尔群，故以"＋"作为同伦群的乘法；而当 $n=1$ 时，即为 T 在基点 x_0 处的基本群 $\Pi_1(T,x_0)$，它通常是个非阿贝尔群，故基本群常以"·"作为群的代数运算，如果仍用"＋"作为基本群乘法，则须注意运算次序。

§5.2　拓扑群和李群

在给出拓扑群的严格定义之前，先考虑一个最简单物理上感兴趣的连续群 $U(1)$，它的群元可用一个模为 1 的复数 $R_\theta=e^{i\theta}$来标征，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$。每个群元对应于单位圆周上一点或实轴 R_1 上闭区间$[0,2\pi]$中一个点，故 $U(1)$的群流形是 1 维的。物理上，$U(1)$群经常以某种荷守恒相联系的阿贝尔规范变换群而存在。

物理上更重要的拓扑群是前章讨论过的各种经典群，它实际上是有限维矢量空间的线性变换群，其每个群元对应一个非奇异方矩阵，并以矩阵乘法作为群的代数运算。习惯上以命名来反映各种经典群群元的性质：如果群元对应的非奇异矩阵没有别的限制，

则群的名字用字母 L（线性）；若群元是幺正矩阵，则以字母 U（幺正）来标征；正交矩阵和行列式为 1 的矩阵群分别用字母 O 和 S 来命名。其实，任何一个连续群都可视为某种矢量空间的线性变换群．每个群元都是该空间的自身映射。下面以具体实例来阐明连续群和连续变换群的统一性，且由后者可方便地导出群的结构函数。

2—1 拓扑群（连续群）

设 M 是 r 维实流形，其中任一点对应定域坐标系中一个 r 维矢量。如果 M 中任一对点 (β,α)，都存在一连续映射 $\Phi:(\beta,\alpha)\rightarrow\gamma\in M$，以 α、β 和 γ 的定域坐标表示其分量关系为

$$\gamma_\mu=\Phi_\mu(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r;\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r),\mu=1,2,\cdots,r$$

简写为 $\gamma=\Phi(\beta;\alpha)$ (5.2.1)

对任一点 $\alpha\in M$，还存在一连续映射 $\Psi:\alpha\rightarrow\alpha^{-1}\equiv\bar{\alpha}$，即 $\bar{\alpha}=\Psi(\alpha)$，或分量形式为

$$(\bar{\alpha})_\mu=\Psi_\mu(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r),\mu=1,2,\cdots,r \tag{5.2.2}$$

则流形 M 就有一个连续群与之对应，其群元 g_α 与 M 中一点 α 有 1—1 对应关系，又称 M 为群流形。点 $\alpha\in M$ 的某定域坐标 R_r 中 r 个分量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 恰好对应着群元 g_α 的 r 个可连续变化的实参数。设群元 g_α，g_β 和 $g_\gamma\in G$ 分别对应其群流形中 α，β 和 γ 点，而群的单位元素 g_0 对应于点 $\epsilon\in M$（通常为方便起见，取 ϵ 为定域坐标系的原点，即 $\epsilon=0$。这样，群的四条公理将与映射中满足的关系一一对应：

TG1. 封闭性

$$g_\gamma=g_\beta\cdot g_\alpha,\qquad g_\alpha,g_\beta,g_\gamma\in G$$

$$\Downarrow$$

$$\gamma_\mu=\Phi_\mu(\beta;\alpha),\qquad \alpha,\beta,\gamma\in M$$

TG2. 结合律

$$g_\gamma\cdot(g_\beta\cdot g_\alpha)=(g_\gamma\cdot g_\beta)\cdot g_\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\Phi_\mu(\gamma;\Phi(\beta;\alpha))=\Phi_\mu(\Phi(\gamma;\beta);\alpha)$$

TG3. 单位元素

$$g_0\cdot g_\alpha=g_\alpha=g_\alpha\cdot g_0$$
$$\Downarrow$$
$$\Phi_\mu(\varepsilon;\alpha)=\alpha_\mu=\Phi_\mu(\alpha;\varepsilon)$$

TG4. 逆元素

$$g_\alpha\cdot g_\alpha^{-1}=g_0=g_\alpha^{-1}\cdot g_\alpha$$
$$\Downarrow$$
$$\Phi_\mu(\alpha;\bar{\alpha})=\varepsilon_\mu=\Phi_\mu(\bar{\alpha};\alpha)$$

以上讨论可看出，连续群有两种不同结构：从代数结构看，它既然是群，必服从群的四条公理；而从拓扑看，它具有流形结构，最后还需指出，虽然 r 维群流形与欧氏空间 R_r 是定域同胚的，但它们在整体上并不同胚，例如 $x^2+y^2+z^2=1$ 这个圆球表面，它是一个 2 维流形，若只考虑其上半球面（或下半球面），其上每一点与 R_2 平面上 $x^2+y^2=1$ 之单位圆闭集的点存在 1—1 的满映射，这两者是同胚的；然而整体看这个 2 维球面与 R_2 的单位圆并不存在 1—1 的满映射，即它们是整体不同胚的 2 维空间。正如一个平面橡皮膜可连续变形为半个球面，但却无法将其连续变为一个完整球面。群流形往往类似于这种球面拓扑结构，n 维群流形只与 R_n 存在定域同胚关系，通常定域坐标系原点往往取为单位元素对应的点。

如果(5.2.1)式和(5.2.2)式中的 $\Phi(\beta;\alpha)$ 和 $\Psi(\alpha)$ 都是 α 和 β 的解析函数，即相对 α_μ 和 β_μ 的各级导数都存在，则称这样的解析群流形所相应的连续群为 r 维李群。

2—2 连续变换群和结构函数

设 M 为 r 维群流形，如果其中任意一对点 (β,α) 存在连续映射 $\Phi:(\beta,\alpha)\rightarrow\gamma\in M$；而 R_n 为 n 维矢量空间，其中每点 $\vec{x}$ 可用坐标 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 来标征。若存在一种映射 $f:M\otimes R_n\rightarrow R_n$，即流形 M

中点 α 对应群元 g_α，它将 R_n 的 $\vec{x}$ 点经 f 而变换到 $\vec{x}'$ 点，其坐标分量为

$$x_i' = f_i(x_1, \cdots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r), (i = 1, 2, \cdots, n)$$

或简写为

$$\vec{x}' = g_\alpha \vec{x} = f(\vec{x}; \alpha) \tag{5.2.3}$$

如果映射 f_i 是 α 和 $\vec{x}$ 的连续函数，并满足条件：

FG1. 封闭性

$$\alpha \in M, \vec{x} \in R_n \Rightarrow \vec{x}' = g_\alpha \vec{x} \in R_n$$

$$x_i' = f_i(x_1, \cdots, x_n; \alpha_1, \cdots, \alpha_r) \in R_n$$

FG2. 结合律

$$g_\beta \cdot (g_\alpha \cdot \vec{x}) = (g_\beta \cdot g_\alpha)\vec{x}$$

$$\Downarrow$$

$$f_i(f(\vec{x}; \alpha); \beta) = f_i(\vec{x}; \Phi(\beta; \alpha))$$

FG3. 单位元素

$$g_0 \vec{x} = \vec{x}$$

$$\Downarrow$$

$$f_i(\vec{x}; \varepsilon) = x_i$$

FG4. 逆元素

$$g_{\bar{\alpha}} \cdot (g_\alpha \vec{x}) = g_\alpha \cdot (g_{\bar{\alpha}} \vec{x}) = g_{\Phi(\alpha; \bar{\alpha})} \vec{x} = \vec{x}$$

$$\Downarrow$$

$$f_i(f(\vec{x}; \alpha); \bar{\alpha}) = f_i(f(\vec{x}; \bar{\alpha}); \alpha) = f_i(\vec{x}; \Phi(\bar{\alpha}; \alpha)) = x_i$$

则映射 f 将构成一个连续变换群。实际上每个连续群都可视为连续变换群的一种特殊情况，只要设 $R_n = M$ 和 $f \equiv \Phi$。如果 f 又是 $\vec{x}$ 和 α 的连续解析函数，则集合 f 构成变换李群。由于 $\Phi(\beta; \alpha)$ 完全决定了拓扑群的结构，通常称它为拓扑群的结构函数。下面将看到，借助于变换李群可方便地求得该李群的结构函数，从而可进一步研究此群的性质。

2—3 李群实例

以下用具体实例来阐明李群和变换李群的统一性，为简便起见，例中所谓的幺元素逆元素实际是流形中相应群元的参数值。

例 1　单参数李群 $x'=ax \quad (a\neq0)$。显然这个单参数变换满足群的条件。其幺元素和逆元素分别为 $a_0=1$ 和 $\bar{a}=\frac{1}{a}$，其结构函数推得的乘积元素 $c=ba$，它是个阿贝尔李群。

例 2　实轴 R_1 上共线变换的 2 维李群，它由以下三类变换所构成：

(1)改变 R_1 上的基矢$\vec{e_1}$的长度；

(2)平移坐标原点；

(3)改变基矢取向，使$\vec{e_1}\rightarrow\vec{e'}_1=-\vec{e_1}$。

若 p 为 R_1 上任一点，相对某坐标系 S(基矢为$\vec{e_1}$))，则 p 点坐标为 $x(p)$。按(a)变基矢长度$\vec{e_1}\rightarrow(\frac{1}{\alpha_1})\vec{e_1}(\alpha_1>0)$，则 p 点坐标为 $x'(p)=\alpha_1x(p)$；而按(b)将原点由 0 变到 $-\alpha_2$ 时，则 p 点坐标变为$x'(p)=x(p)+\alpha_2$；如果改变$\vec{e_1}$方向，则 p 点坐标变为 $x'(p)=-x(p)$。故这种线性变换群可表示为 $x'=f(x;\alpha_1,\alpha_2)=\alpha_1x+\alpha_2(\alpha_1\neq0)$。该群流形为 2 维欧氏平面 R_2，但存在一条 $\alpha_1=0$ 的割线。其幺元素为 $\alpha_1=1,\alpha_2=0$，而逆元素为$\overline{\alpha_1}=\frac{1}{\alpha_1},\overline{\alpha_2}=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$。由群乘法可求其结构函数 Φ。因为

$$x''=f(x';\beta_1,\beta_2),x'=f(x;\alpha_1,\alpha_2),\text{则}$$

$$x''=\beta_1x'+\beta_2=\beta_1(\alpha_1x+\alpha_2)+\beta_2=\beta_1\alpha_1x+\beta_1\alpha_2+\beta_2$$

由上式可知该群的结构函数为

$$\Phi_1(\beta;\alpha)=\beta_1\alpha_1,$$

$$\Phi_2(\beta;\alpha)=\beta_1\alpha_2+\beta_2。$$

不难看出其参数是以 $\alpha_1=0$ 为分界线的两个半平面上的一切点，

而 Φ_1 和 Φ_2 又是群参数的解析函数，不难证明它们满足群的四个公理，故是一个非阿贝尔 2 维李群。既然此群流形 $M=R_2-(\alpha_1=0,\alpha_2)$，故不是个连通拓扑空间。直线 $(\alpha_1=0,\alpha_2)$ 将群流形分为左右两半平面，每个半平面是道路连通的，称之流形的叶。显然，只有包含单位元素的叶才能形成一个连续子群。

例 3　2 维线性群 $GL(2,R)$。

该群是由全体非奇异 2 维实矩阵构成，每个群元 $g(\alpha)$ 由 4 个实参数 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 α_4 标征，即其群流形是个 4 维曲面。它对应的线性变换群为 $\vec{x}\to\vec{x}'=g(\alpha)\vec{x}$，分量形式为

$$x_1'=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,\qquad x_2'=\alpha_3x_1+\alpha_4x_2$$

由此可推得：单位元素为 $\overset{0}{\alpha_1}=\overset{0}{\alpha_4}=1,\overset{0}{\alpha_2}=\overset{0}{\alpha_3}=0$，令 $\det\alpha=\alpha_1\alpha_4-\alpha_2\alpha_3$，其逆元素为 $\overline{\alpha_1}=\alpha_4/\det\alpha,\overline{\alpha_2}=-\alpha_2/\det\alpha,\overline{\alpha_3}=-\alpha_3/\det\alpha$ 和 $\overline{\alpha_4}=\alpha_1/\det\alpha$。结构函数为 $\Phi_1=\Phi_1(\beta;\alpha)=\beta_1\alpha_1+\beta_2\alpha_3,\Phi_2=\beta_1\alpha_2+\beta_2\alpha_4,\Phi_3=\beta_3\alpha_1+\beta_4\alpha_3,\Phi_4=\beta_3\alpha_2+\beta_4\alpha_4$。

尽管李群的性质涉及许多抽象的概念，但值得庆幸的是物理上有重要意义的李群大都是线性变换李群，都可以类似方式研究它们的结构。

§5.3　李群其它重要概念

3—1　同　构

由李群实例可看出，r 维线性李群的映射是 n 个变量 x_i 和 r 个群参数的解析函数，群的结构完全决定于群流形，即李群的结构函数 Φ，而与线性空间没有必然联系。如果有两个李群，虽然它们的线性空间不同，但只要群参数的定义域及其结构函数一样，即具有相同的群流形，就称它们是同构李群。例如以下两个线性变换李

群

$$x'=\alpha x \text{ 和} \begin{cases} x'=\alpha x \\ y'=\alpha y \end{cases} \qquad (\alpha\neq 0)$$

则是完全同构李群。

除上述整体同构之外，李群还有定域同构的重要特征。设 M 和 M' 为两个 r 维李群流形，若在幺元素附近它们的结构函数分别为 Φ 和 Φ'，且满足以下两个条件，则称这两个 r 维李群是定域同构的：

1° 存在 1—1 映射 $M\longleftrightarrow M'$。

2° 如果 $\alpha,\beta\in M,\alpha',\beta'\in M'$，则 $\alpha\cdot\beta$ 和 α^{-1}能被确定的充要条件是 $\alpha'\cdot\beta'$和α'^{-1}可被确定。

显然，两个定域同构李群并不一定也是整体同构。例如$SO(3)$和 $SU(2)$是定域同构的，两者只在幺元素附近群流形存在着 1—1 的映射，而整体上两个 $SU(2)$群元对应着一个 $SO(3)$群元。

3—2　共轭类和不变子群

这些概念和有限群相同，只需强调指出拓扑群的共轭类及不变子群的求法。李群实例 2 中，$x'=g_\alpha x=\alpha_1 x+\alpha_2(\alpha_1\neq 0)$，若选定一对群参数$(\alpha_1,\alpha_2)$，则唯一对应群元 g_α。若问哪些群元与 g_α 同类，只要保持 g_α 不变，作群乘法 $g_\beta g_\alpha g_\beta^{-1}$，当 g_β 跑过整个群或 β 取其群流形每个点，则可求得其全部同类元素。由于

$$\begin{aligned} x'''&=g_\beta g_\alpha g_\beta^{-1}x=g_\beta x''=\beta_1 x''+\beta_2=\beta_1\left[\frac{\alpha_1}{\beta_1}(x-\beta_2)+\alpha_2\right]+\beta_2 \\ &=\alpha_1 x+(\beta_2-\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2) \end{aligned}$$

可见与 g_α 同类的是保持 α_1 不变的全体元素。

变换群 $x'=x+\beta$ 和 $x'=\alpha x(\alpha\neq 0)$都是 2 维变换李群 $x'=\alpha_1 x+\alpha_2(\alpha_1\neq 0)$的子群，但前者是个不变子群，因为它包含 $\alpha_1=1$ 的全部同类元素，而后者仅是个阿贝尔子群。

$SO(n)$和 $SU(n)$分别是 $O(n)$和 $U(n)$的不变子群。$SU(2)$群

有下面形式的 2 参数变换子群

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = \dfrac{1}{a} y \end{cases}$$

这个子群的幺元素为 $a_0 = 1, b_0 = 0$，其结构函数为 $\Phi_1 = a_2 a_1$ 和 $\Phi_2 = a_2 b_1 + \dfrac{1}{a} b_2$，虽然它是个非阿群，但并不是 $SU(2)$ 的不变子群。

3-3 连通性和叶

如果群流形内任意两点都能用一条或多条完全在此流形上的道路连结起来，则称此群是连通的，否则称之不连通群。如绕定轴转动的 $U(1)$ 群和三维空间真转动群 $SO(3)$ 都是连通群。然而，例 2 的群流形被直线($\alpha_1 = 0, \alpha_2$)分为两部分，通常称每个连通部分为连续群的叶。如图 5.4 所示，由于连结(1,0)和(−1,0)两点的任何道路必经过某点($\alpha_1 = 0, \alpha_2$)，而该点不在群流形上，故它是个不连通群。

如果流形中连结任意两点的所有道路都是同伦的，则称它是单连通的。如图 5.4 中右半平面叶中，由于任意曲线(1,0)—q—p 能连续变形到曲线(1,0)—q'—p，即道路同伦，故李群 $x' = \alpha_1 x + \alpha_2 (\alpha_1 > 0)$ 是单连通的。

内轮胎形状的群流形虽然是光滑而连通的，其上既无割线也无漏洞，但却没有任何连续映射使之主圆连续变形到过横截面的小圆，故此流形不是单连通的，可见连通性和连续性不同，后者依赖于一个或多个群参数的连续变化，表现上虽是连续群流形，但并不一定是单连通的。对于连通李群又可根据其流形中道路的不同伦类个数 k 来确定 k 重连通性，如图 5.5 中，图(a)是个双连通李群，如果将其内外边缘粘接起来，就是个内轮胎形；而图(b)是 4 重连通的。

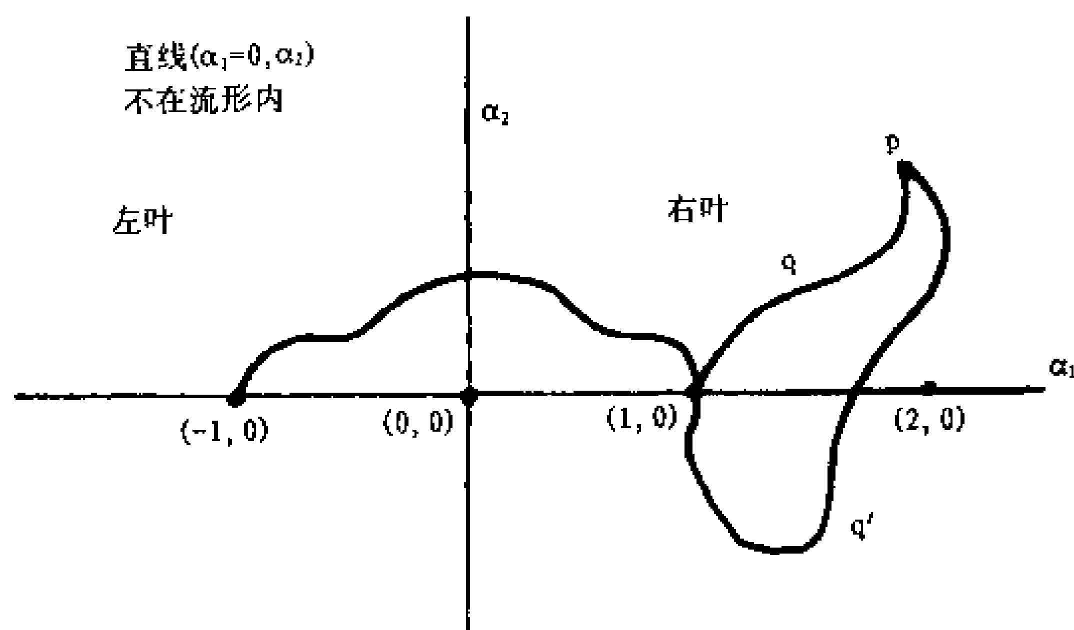


图 5.4　群流形 $M=R_2-(\alpha_1=0,\alpha_2)$

若一个拓扑群有 r 个连续参数和 s 个分离参数，则它的群流形是 r 维的，且由 s 个不相交的子空间——叶组成，而两叶间存在着一一对应，通常只讨论包含幺元素那一叶的群解析性。如果拓扑群的群流形是紧致的，亦即群参数空间是封闭而有界的，则称该群为紧致的。

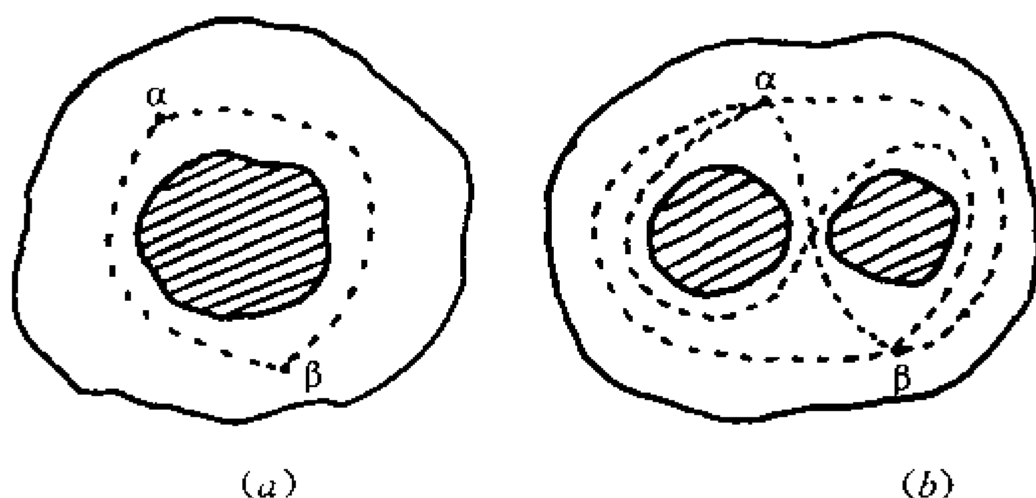


图 5.5　李群的多重连通性

3—4 李群紧致性和群上不变积分

定义：如果一个李群流形（有限维的实数或复数欧氏空间）是有界且封闭的，则称它为紧致李群，否则称之非紧致李群。

所谓"有界"是群参数皆在群流形的有限球体内，而"封闭"则要求每个群参数必在实数或复数的闭区间内改变。例如，$SO(2)$的群流形 $R_1(\alpha)$，其群参数取值范围为 $0\leqslant\alpha\leqslant2\pi$。对于 n 维群流形 R_n，则要求 $a_i\leqslant\alpha_i\leqslant b_i, i=1,2,\cdots,n$。如果任何一个有限的端点 a_i 或 b_i 不是群参数的取值，都将破坏群流形的封闭性。

显然，如果李群 G 是紧致的，则其子李群也定是紧致的（除去在极少数情况下，其子李群有时包含着非封闭的参数），然而，一个非紧致的李群却可能含有紧致子李群，区别李群的紧致性是很重要的，因为紧致李群表示论与有限群非常类似，但对非紧致李群却全然不同。物理上有重要应用的半单李群是否紧致，将在李代数中有严格判据。

例 1　一切实数相乘构成的群显然是非紧致李群。因为群参数是实轴上无界的全体点集。

例 2　$O(N)$、$SO(N)$、$U(N)$和 $SU(N)$都是紧致李群。

例 3　标准的洛仑兹变换群，它使之坐标系 $O'x'y'z't'$ 沿坐标系 $Oxyzt$ 的 ox 轴以速度 u 平动。

$$x'=\gamma(x-\frac{u}{c}ct),\quad y'=y$$

$$ct'=\gamma(ct-\frac{u}{c}x),\quad z'=z$$

$$\gamma=(1-\frac{u_2}{c^2})^{-1/2},\quad -c<u<c$$

令 $Y=\mathrm{sh}^{-1}(\gamma\frac{u}{c})$，则上述的坐标变换矩阵为

$$\Lambda(Y)=\begin{pmatrix} \text{ch}Y & 0 & 0 & -\text{sh}Y \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\text{sh}Y & 0 & 0 & \text{ch}Y \end{pmatrix} \qquad (5.3.1)$$

$-\infty<Y<\infty$，一切(5.3.1)式的变换集合将形成一个标准洛仑兹群，同时这些矩阵又是该群的忠实表示。由于群参数 Y 是无界的，故是个非紧致1维李群。对于三维空间和一维时间的齐次和非齐次洛仑兹群，不难看出也是非紧致的，而上述的标准洛仑兹群只是它们的子李群。

根据重排定理，对于有限群的任一群上函数 $f(g_\alpha)$，都有

$$\sum_{g_\alpha} f(g_\alpha)=\sum_{g_\alpha} f(g_\beta\cdot g_\alpha),g_\beta\in G$$

通常称上式为左不变。类似也有右不变

$$\sum_{g_\alpha} f(g_\alpha\cdot g_\beta)=\sum_{g_\alpha} f(g_\alpha),g_\beta\in G$$

特别是当 $f(g_\alpha)=1$ 时，则有 $\sum\limits_{g_\alpha} 1=g$——群的阶数。若推广到连续群，自然对群元求和要改为对群参数求积分，这时就出现群上函数积分是否有限和左右不变关系能否成立的问题。一般说来，函数自变量改变后的积分应与原函数不同，故其左右不变性需加上一个权重因子 $\sigma_l(\alpha)$和 $\sigma_r(\alpha)$，故有

$$\int f(g_\beta\cdot g_\alpha)\sigma_l(\alpha)\mathrm{d}\alpha=\int f(g_\alpha)\sigma_l(\alpha)\mathrm{d}\alpha \qquad (5.3.1\text{a})$$

$$\int f(g_\alpha\cdot g_\beta)\sigma_r(\alpha)\mathrm{d}\alpha=\int f(g_\alpha)\sigma_r(\alpha)\mathrm{d}\alpha \qquad (5.3.1\text{b})$$

其中，

$$\begin{aligned}\int\sigma_l(\alpha)\mathrm{d}\alpha&\equiv\int_{a_1}^{b_1}\mathrm{d}\alpha_1\cdots\int_{a_r}^{b_r}\mathrm{d}\alpha_r\sigma_l(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\\ \int\sigma_r(\alpha)\mathrm{d}\alpha&\equiv\int_{a_1}^{b_1}\mathrm{d}\alpha_1\cdots\int_{a_r}^{b_r}\mathrm{d}\alpha_r\sigma_r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\end{aligned} \qquad (5.3.2)$$

称 σ_l 和 σ_r 为左右不变权重函数，只有(5.3.2)式积分有限时，才能

研究拓扑群的群上函数的不变积分，当 $\sigma_e=\sigma_r=\sigma(\alpha)$ 时，称 G 为单模李群，而积分 $V=\int\sigma(\alpha)\mathrm{d}\alpha$ 称之群体积。如果群流形是多叶的，则应对各叶的不变积分求和。

定理 1：如果 G 是紧致李群，则必定为单模群，且对于每个群上连续函数 $f(g_\alpha)$，其不变积分存在且有限，即

$$\int f(g_\alpha)\sigma(\alpha)\mathrm{d}\alpha\equiv\int_{a_1}^{b_1}\mathrm{d}\alpha_1\cdots\int_{a_r}^{b_r}\mathrm{d}\alpha_r f(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\sigma(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$$

为有限值。若取 $f(\alpha)\equiv1$，立即得到群体积。

定理 2：非紧致李群的左右不变积分皆是无限的。

定理 3：若 G 是阿贝尔或是半单的，则必是单模群。

例 1 正的实数相乘将构成一个单连通单参数非紧致阿贝尔李群，因而也是个单模群。为了将实数相乘变为计算简便的实数相加，可取参数 $t=e^\alpha$，$-\infty<\alpha<\infty$，其权重函数 $\sigma(\alpha)=1$，对任一实函数 $F(\alpha)=f(e^\alpha)$ 和某个实数 $t'=e^{\alpha'}$，都有

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha+\alpha')\mathrm{d}\alpha=\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

而该群体积却是无限的。

对于紧致李群，求其群体积和群上函数不变积分的关键在于计算权重因子 $\sigma(\alpha)$。设 $f(\alpha)$ 是任一群上连续函数，则有

$$\int f(\alpha)\sigma(\alpha)\mathrm{d}\alpha=\int f(\gamma)\sigma(\alpha)\mathrm{d}\alpha \tag{5.3.3}$$

其中 γ 为对任意固定群元 g_β 而满足

$$g(\gamma)=g(\alpha)\cdot g(\beta) \tag{5.3.4}$$

的群元 $g(\gamma)$ 的参数。显然

$$\int f(\alpha)\sigma(\alpha)\mathrm{d}\alpha=\int f(\gamma)\sigma(\gamma)\mathrm{d}\gamma \tag{5.3.5}$$

由拓扑群的结构函数 $\gamma=\Phi(\alpha;\beta)$ 可知，γ 是 α 和 β 的函数，引进雅可比行列式

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\gamma_1}{\partial\alpha_1} & \frac{\partial\gamma_1}{\partial\alpha_2} & \cdots & \frac{\partial\gamma_1}{\partial\alpha_r}\\ \vdots & & & \vdots\\ \frac{\partial\gamma_r}{\partial\alpha_1} & \frac{\partial\gamma_r}{\partial\alpha_2} & \cdots & \frac{\partial\gamma_r}{\partial\alpha_r}\end{vmatrix} \tag{5.3.6}$$

则可将(5.3.5)式改为

$$\int f(\alpha)\sigma(\alpha)\mathrm{d}\alpha=\int f(\gamma)\sigma(\gamma)\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha}\mathrm{d}\alpha$$

将该式与(5.3.3)式比较可知，权函数 σ 对所有群参数 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$ 都必须满足条件

$$\sigma(\gamma)\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha}=\sigma(\alpha)=\sigma(\gamma)\frac{\partial\Phi(\beta,\alpha)}{\partial\alpha} \tag{5.3.7}$$

为此，我们自然可取 α 的任意方便的值，通常取幺元对应的群参数 $\alpha=\alpha^0=0$，上式化为

$$\sigma(\gamma)=\sigma(o)/\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=0} \tag{5.3.8}$$

常数 $\sigma(o)$ 是无关紧要的，一般取 $\sigma(o)=1$。

例 2　$SO(2)$ 群，它是个单参数阿贝尔紧致李群，故也是单模的，其群参数即为平面转角 θ，$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$。其结构函数 $\Phi(\theta,\theta')=\theta+\theta'$，故其权重函数按(5.3.8)式不难求得 $\sigma(\theta'')=1$，该群体积为 $V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi$。

例 3　$SU(2)$ 是个三参数紧致李群，根据幺正幺模性，其每个群元可表为 $u=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta^* & \alpha^*\end{pmatrix}$，令 $\alpha=\cos\alpha_1 e^{i\alpha_2}$，$\beta=\sin\alpha_1 e^{i\alpha_3}$，三个群参数取值范围为 $0\leqslant\alpha_1\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant\alpha_2\leqslant2\pi$ 和 $0\leqslant\alpha_3\leqslant2\pi$，由该群的结构函数和(5.3.8)式可求得其权重函数为

$$\sigma(\alpha)\equiv\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\frac{1}{4\pi^2}\sin2\alpha_1\sim\sin2\alpha_1$$

所以 $SU(2)$ 的群体积为 $\int\sigma(\alpha)\mathrm{d}\alpha=4\pi^2$。

例 4　$SO(3)$ 也是个紧致单模群，作为练习读者也可参阅

J. P. Elliott书中附录 4，其权重函数为 $\sigma(\theta,\psi,\varphi)=(1/8\pi^2)\sin\theta$。

例 5　点群 $D_{\infty h}$是个 1 维李群。

$$D_{\infty h}=R_2\otimes\{E,C_2,I,\sigma_h\}$$

而 $R_2=\{E,C_\theta\}$，$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$。它同构于 $SO(2)$，故有

$$\int f(g_\alpha)\sigma(\alpha)\mathrm{d}\alpha=\sum_{j=1}^{4}\int_0^{2\pi}f(C_\theta,T_j)\mathrm{d}\theta$$

其中 $T_1=E,T_2=C_2,T_3=I,T_4=\sigma_h$，当取 $f(g_\alpha)=1$ 时，则可得到该群体积为 8π。

例 6　标准洛仑兹群是个非紧致单参数李群。由定理三可知，这个阿贝尔群是单模的。若以速度为群参数，按群乘法可得

$$g(v)=g(v_1)g(v_2)=g\left(\frac{v_1+v_2}{1+v_1\cdot v_2}\right)$$

其结构函数为 $\Phi(v_1,v_2)=\dfrac{v_1+v_2}{1+v_1\cdot v_2}$，求权重函数就比较困难，若按(5.3.1)式取变量 Y 为群参数，在自然单位时 $c=1$，则有 $g(Y_1)g(Y_2)=g(Y_1+Y_2)$，这与 $SO(2)$类似，$\mathrm{d}Y$ 本身是不变积分元。在粒子物理中，Y 称之快度，它是个洛仑兹积分不变量。

$$Y=\mathrm{sh}^{-1}(v/\sqrt{1-v^2})=\mathrm{th}^{-1}(v)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right)$$

应该指出，并非一切拓扑群都能找到恰当的权重函数 $\sigma(\alpha)$，因此关于有限群的一些重要定理不能推广到全体连续群。然而对于紧致李群可以找到恰当的权重函数，使之群上函数不变积分成立，从而使有限群的一些重要定理可以推广到紧致李群：

1° 存在无限多个可数的有限维不可约表示。

2° 任一有限维表示都有等价的幺正表示，而两个等价的幺正表示可通过幺正相似变换相联系。

3° 如果某有限维表示可约，则必完全可约。

4° 两个不可约幺正表示的矩阵元满足如下正交关系

$$\int D_{ij}^{(\mu)*}(\alpha)D_{kl}^{(\nu)}(\alpha)\sigma(\alpha)\mathrm{d}\alpha=\frac{1}{n_\mu}\delta_{\mu\nu}\delta_{ik}\delta_{jl}\int\sigma(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

5° 不可约表示的特征标满足正交关系

$$\int X^{(\mu)*}_{(\alpha)} X^{(\nu)}_{(\alpha)} \sigma(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \delta_{\mu\nu}\int \sigma(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

6° 表示不可约性的判据是

$$\int |X^{(\mu)}_{(\alpha)}|^2 \sigma(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \int \sigma(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

物理学中广泛应用的拓扑群大多是紧致李群，以上基本性质对研讨问题是很有帮助的。

§5.4 李群和李代数

以上只给出了李群的定义及其一般整体性质，本节将集中研讨李群在单位元邻域的局部性质，从而导出李群的无穷小生成元及李代数的概念。李氏三个定理提供了与任意李群相伴随的李代数结构，一个李群只对应一个李代数；而李氏三定理的逆定理恰恰相反，它们将给出与任何有限维李代数相伴随的李群结构，但这种对应关系并不是一对一的，可能有多个不同李群却对应同一个李代数，这些具有相同李代数的李群皆可从某个单连通李群求得，所有这些李群都是定域(局部)同构的，但其整体性质并不相同。本节最后介绍了泰劳(Taylor)定理，由它可从给定李代数求出相应李群的结构函数 $\Phi_\lambda(\beta,\alpha)$。这七个定理将使李群和李代数之间具有本质上的等价性，在实际应用时是用李群还是李代数要视以哪种方法更方便和实用而定。

4—1 李群的无穷小变换及其生成元

索非斯·李(S. Lie，1893 年)对李群理论的重大贡献是专门研究了单位元附近的无穷小变换，从而得到李群的基本性质。我们先从单参数李群出发来研究李群的无穷小变换特性。

设 $x'=f(x;a)$，其群流形是 1 维的，取参数 a 的一切可能值，

变换 $x'=f(x;a)$就将从初位置 x 变换所有末位置 x'。不失一般性，我们取初始点 x 为 $a=0$，然后连续地变动参数 a，逐步使 x 最终变到 x''，从而导致连续群无穷小变换的重要概念。以图 5.6 可

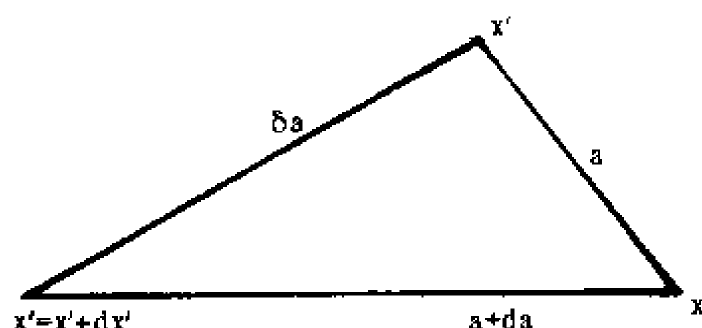


图 5.6　无穷小变换

形象说明从 $x\rightarrow x''$有多种路径。一条路径是 $x=f(x;o)\rightarrow x'=f(x;a)\rightarrow x''=f(x';\delta a)$，另一条是从 x 直到 $x''=f(x;a+\mathrm{d}a)$，而 δa 和 $\mathrm{d}a$ 都是与 a 相比的无穷小量。既然 $f(x;a)$是 x 和参数 a 的解析函数，则可做级数展开到一阶无穷小：

$$f(x';\delta a)=f(x';o)+\left.\frac{\partial f(x';b)}{\partial b}\right|_{b=0}\delta a,$$

$$\Downarrow$$

$$x''=x'+\mathrm{d}x'=x'+\left.\frac{\partial f(x';b)}{\partial b}\right|_{b=0}\delta a,$$

所以
$$\mathrm{d}x'=\left.\frac{\partial f(x';a)}{\partial a}\right|_{a=0}\delta a=U(x')\delta a \tag{5.4.1}$$

而从该李群流形相应的结构函数可得

$$c=\Phi(a;b)\Rightarrow a+\mathrm{d}a=\Phi(a;\delta a)$$

作级数展开到一级无穷小可推得

$$\mathrm{d}a=\left.\frac{\partial\Phi(a;b)}{\partial b}\right|_{b=0}\delta a=\frac{1}{\Psi(a)}\delta a,\text{即}$$

$$\delta a=\Psi(a)\mathrm{d}a,\Psi(a)=1/\left.\frac{\partial\Phi(a;b)}{\partial b}\right|_{b=0} \tag{5.4.2}$$

将(5.4.2)代入(5.4.1)式得

$$\mathrm{d}x' = U(x')\Psi(a)\mathrm{d}a \qquad \text{故有}$$

$$\frac{\mathrm{d}x'}{U(x')} = \Psi(a)\mathrm{d}a \tag{5.4.3}$$

设上式左方的原函数为 $\upsilon(x')$，做上式两边定积分，当 $a=0\to a$ 时，则 $x\to x'$，故有

$$\upsilon(x') - \upsilon(x) = \int_0^a \Psi(a)\mathrm{d}a$$

若令 $y=\upsilon(x)$，$y'=\upsilon(x')$，$t=\int_0^a \Psi(a)\mathrm{d}a$，则上式化为

$$y'-y=t \text{ 或 } y'=y+t \tag{5.4.4}$$

由(5.4.4)式看出，单参数李群等价于一维平移群，对其总可引入新的群参数 t 作为平移参数，设其每个群元为 $R(t)$，则有

$$R(t_1)\cdot R(t_2) = R(t_1+t_2),\ R(t)^{-1} = R(-t)$$

一般情况下，设 r 维变换李群的么元对应的群参数为 $a^0=(a_1^0, a_2^0, \cdots, a_r^0)$，参照单参数李群图 5.6，则这个 r 维李群在么元附近的两条路径的无穷小变换为

$$x_i' = f_i(x_1, \cdots, x_n; a_1, \cdots, a_r), \qquad i=1,2,\cdots,n$$

$$x_i'' = x_i' + \mathrm{d}x_i' = f_i(x_1', \cdots, x_n'; \delta a_1, \cdots, \delta a_r)$$

$$\mathrm{d}x_i' = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial f_i(x_1', \cdots, x_n'; a_1, \cdots, a_r)}{\partial a_k}\bigg|_{a=a^0} \delta a_k$$

若令

$$U_{ik}(x') = \frac{\partial f_i(x_1', \cdots, x_n'; a_1, \cdots, a_r)}{\partial a_k}\bigg|_{a=a^0} \tag{5.4.5}$$

所以
$$\mathrm{d}x_i' = \sum_{k=1}^{r} U_{ik}(x')\delta a_k \tag{5.4.6}$$

设函数 $F(x)=F(x_1, \cdots, x_n)$ 是 x_i 的解析函数，当 x_i 作无穷小变换时，则 $F(x)$ 也应作相应改变。利用(5.4.6)式则有

$$\mathrm{d}F(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(x)}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} \sum_{l=1}^{r} U_{il}(x)\delta a_l$$

$$= \sum_{l=1}^{r} \delta a_l \Big[\sum_{i=1}^{n} U_{il}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big] F(x) \tag{5.4.7}$$

若令 $$X_i = \sum_{i=1}^{n} U_{ii}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{5.4.8}$$

则得 $$\mathrm{d}F(x) = \sum_{i=1}^{r} \delta a_i X_i F(x) \tag{5.4.9}$$

算符 X_i 称之李群的生成元(无穷小算子),r 维李群则有 r 个生成元,称$(1+\sum_i X_i\delta a_i)$为近么算符。当取 $F(x)=x$ 时,则上式就回到(5.4.6)式,对于任何线性变换李群,由(5.4.8)式可方便求其生成元。

例 1 求换变李群 $x'=f(x;a,b)=ax+b(a\neq 0)$的生成元。

这是个双参数李群,其么元对应的群参数为 $a^0=1,b^0=0$,则由(5.4.8)式可求得二个生成元为

$$X_1 = \sum_{i=1}^{n} u_{i1} \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial a}\bigg|_{(a^0,b^0)} \frac{\partial}{\partial x} = x\frac{\partial}{\partial x},$$

$$X_2 = \frac{\partial f}{\partial b}\bigg|_{(a^0,b^0)} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}。$$

由此可求得相应无穷小变换与群参数关系为

$$x' = (1+\sum_i X_i\delta a_i) f(x;a^0,b^0) = x + x\delta a + \delta b,$$

所以 $$\mathrm{d}x = x' - x = x\delta a + \delta b。$$

例 2 求 $SO(3)$群的生成元。

由第四章可知,这是个 3 维紧致李群。对于无穷小变换可令其正交矩阵为 $A=I+B$,由 $A\tilde{A}=I$ 推得无穷小矩阵 $B+\tilde{B}=0$,即 B 为 3 维斜对称矩阵,若设三个独立无穷小实参数为 α_1、α_2 和 α_3,则有

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$$

其么元对应 $\alpha_1^0=\alpha_2^0=\alpha_3^0=0$,由$\vec{x'}=A\vec{x}$ 可得

$$x_1' = x_1 + \alpha_3 x_2 - \alpha_2 x_3 = f_1(x_i;\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$$

$$x_2'=-\alpha_3x_1+x_2+\alpha_1x_3=f_2(x_i;\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$$

$$x_3'=\alpha_2x_1-\alpha_1x_2+x_3=f_3(x_i;\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$$

所以 $$X_1=\sum_i \left.\frac{\partial f_i}{\partial\alpha_1}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_i}=x_3\frac{\partial}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$X_2=x_1\frac{\partial}{\partial x_3}-x_3\frac{\partial}{\partial x_1},\quad X_3=x_2\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_2} \tag{5.4.10}$$

以上从线性变换李群角度研讨了无穷小变换及其生成元。下面单纯从李群流形上再来讨论这种变换及生成元的表达式。本章§5.2曾讨论了李群及其流形对应关系，一个 r 维李群，其每个群元必对应 r 维群流形中一点，设 $g(\alpha)=g(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$，$g(\beta)=g(\beta_1,\cdots,\beta_r)$，若 $g(\alpha)g(\beta)=g(\gamma)$，则 $\gamma_\mu=\Phi_\mu(\alpha_1,\cdots,\alpha_r;\beta_1,\cdots,\beta_r)$必为这 r 个实参数的解析函数，不失一般性可取么元素对应群流形的定域原点，即 $g(0)g(a)=g(a)g(0)=g(a)$，即对应结构函数满足

$$\Phi(0;a)=\Phi(a;0)=a \tag{5.4.11}$$

参照图 5.6 可知，$g(\delta a)\cdot g(a)=g(a+\mathrm{d}a)$，相应结构函数为

$$\Phi_\mu(\delta a;a)=a_\mu+\mathrm{d}a_\mu,(\mu=1,2,\cdots,r) \tag{5.4.12}$$

将上式 Φ_μ 在 a 附近对 δa 级数展开，并略去高次项得到

$$\Phi_\mu(\delta_a;a)=\Phi_\mu(0;a)+\sum_{\gamma=1}^{r}\left.\frac{\partial\Phi_\mu(b;a)}{\partial b\gamma}\right|_{b=0}\delta a_\gamma=a_\mu+\mathrm{d}a_\mu,$$

所以 $$\mathrm{d}a_\mu=\sum_{\gamma=1}^{r}\left.\frac{\partial\Phi_\mu(b;a)}{\partial b_\gamma}\right|_{b=0}\delta a_\gamma,(\mu=1,2,\cdots,r)$$

令 $$\Theta_{\mu\gamma}(a)=\left.\frac{\partial\Phi_\mu(b;a)}{\partial b\gamma}\right|_{b=0} \tag{5.4.13a}$$

所以 $$\mathrm{d}a_\mu=\sum_{\gamma=1}^{r}\Theta_{\mu\gamma}(a)\delta a_\gamma \tag{5.4.13.b}$$

设 $F(a)=F(a_1,\cdots,a_r)$为群流形中任一场函数，当参数 a_λ 作微小改变到 $a_\lambda+\mathrm{d}a_\lambda$ 时，则 $F(a)$变为 $F(a+\mathrm{d}a)$，利用(5.4.13)式可得

$$F(a+\mathrm{d}a)=F(a)+\sum_{\mu=1}^{r}\frac{\partial F(a)}{\partial a_{\mu}}\mathrm{d}a_{\mu}$$

$$=\Big(1+\sum_{\gamma=1}^{r}\delta a_{\gamma}X_{\gamma}\Big)F(a) \tag{5.4.14}$$

其中 $X_{\gamma}=\sum_{\mu=1}^{r}\Theta_{\mu\gamma}\frac{\partial}{\partial a_{\mu}} \qquad (\gamma=1,2,\cdots,r)$ (5.4.15)

称 X_{γ} 为李群在拓扑流形上的生成元。

当然，我们也可直接考虑李群幺元附近的无穷小变换来定义其生成元，形式上可将幺元附近的群元 $g(\delta a)$表示为

$$g(\delta a_1,\cdots,\delta a_r)=g(0)+\sum_{\mu=1}^{r}X_{\mu}\delta a_{\mu} \tag{5.4.16}$$

而算子 X_{μ} 形式上定义为

$$X_{\mu}=\lim_{a_{\mu}\to 0}\frac{g(a_1\cdots,a_{\mu},0,\cdots)-g(0)}{a_{\mu}}=\frac{\partial g(a)}{\partial a_{\mu}}\bigg|_{a=0} \tag{5.4.17}$$

$g(\delta a)$称之李群的无穷小元素，而 $X_{\mu}(\mu=1,\cdots,r)$称之李群的生成元或无穷小算子。(5.4.16)式说明 r 维李群的任一无穷小群元皆可表为该群幺元素及其 r 个生成元的线性组合。

以上介绍了李群生成元三种不同形式的定义，它们是完全等价的，以何种形式求李群的生成元更为简单要视李群的具体结构而定，对于物理上常常碰到的各种 n 阶矩阵群，可仿照(5.4.17)很方便求出其 n 阶矩阵形式的生成元。设 r 维矩阵群元素为 $M(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$，则

$$X_{\mu}=\lim_{\alpha_{\mu}\to 0}\frac{M(0,\cdots,\alpha_{\mu},0\cdots)-M(0,\cdots,0)}{\alpha_{\mu}}$$

例如，考虑非奇异二维实矩阵群，其幺元和一般无穷小群元分别为

$$M(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad M(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1+\alpha_1, & \alpha_2\\ \alpha_3, & 1+\alpha_4\end{pmatrix}$$

故此线性群的 4 个生成元为

$$X_1=\frac{\partial}{\partial\alpha_1}M(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\bigg|_{\alpha=0}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},X_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$X_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},X_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

本节(5.4.10)式给出的 $SO(3)$ 群的生成元，同样可以矩阵形式给出。因每个无穷小群元 $A\in SO(3)$ 可表为

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1 & \alpha_3 & -\alpha_2\\ -\alpha_3 & 1 & \alpha_1\\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 1\end{pmatrix}$$

所以

$$X_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix},X_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$X_3=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\tag{5.4.18}$$

(5.4.10)和(5.4.18)两式皆为 $SO(3)$ 群完全等价的生成元的不同算符形式。

4—2 李氏第一定理

如同生成元具有不同的形式一样，其李氏第一定理也有不同表述形式。下面以线性变换群为基础来研讨李氏第一定理：如果 $x_i'=f_i(x_1,\cdots,x_n;\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$ 为解析函数，则

$$\frac{\partial x_i'}{\partial\alpha_l}=\sum_{k=1}^{r}U_{ik}(x')\Psi_{kl}(\alpha)\tag{5.4.19}$$

且 $U_{ik}(x')$ 和 $\Psi_{kl}(\alpha)$ 分别为 x' 和 α 的解析函数。

证明　参看图 5.6 可知，李群流形中某群元 $g(\alpha)$ 附近的无穷小变换 $g(\delta\alpha)$ 满足 $g(\delta\alpha)g(\alpha)=g(\alpha+\mathrm{d}\alpha)$，其结构函数为

$$\alpha_l+\mathrm{d}\alpha_l=\Phi_l(\alpha_1,\cdots,\alpha_r;\delta\alpha_1,\cdots,\delta\alpha_r)$$

在流形 α 点附近作级数展开到一阶无穷小，则有

$$\mathrm{d}\alpha_l=\sum_{m=1}^{r}\left.\frac{\partial\Phi_l(\alpha_1,\cdots,\alpha_r;\beta_1,\cdots,\beta_r)}{\partial\beta_m}\right|_{\beta=0}\delta\alpha_m$$

若令

$$\left.\frac{\partial\Phi_i}{\partial\beta_m}\right|_{\beta=0}=\Theta_{im}(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)=\Theta_{im}(\alpha) \tag{5.4.20}$$

则有

$$\mathrm{d}\alpha_i=\sum_{m=1}^{r}\Theta_{im}(\alpha)\delta\alpha_m,\Theta_{im}(0)=\delta_{im} \tag{5.4.21}$$

由于 $\Theta_{im}(\alpha)$ 为 r 阶非奇异矩阵，它必有逆矩阵 $\Psi(\alpha)$ 存在且满足

$$\Theta(\alpha)\Psi(\alpha)=\Psi(\alpha)\Theta(\alpha)=I,\Psi_{kt}(0)=\delta_{kt},$$

所以 $$\delta\alpha_k=\sum_{\lambda=1}^{r}\Psi_{k\lambda}(\alpha)\mathrm{d}\alpha_\lambda \tag{5.4.22}$$

将上式代入(5.4.6)式，则得

$$\mathrm{d}x_i'=\sum_{k=1}^{r}U_{ik}(x')\sum_{t=1}^{r}\Psi_{kt}(\alpha)\mathrm{d}\alpha_t$$

所以 $$\frac{\partial x_i'}{\partial\alpha_t}=\sum_{k=1}^{r}U_{ik}(x')\Psi_{kt}(\alpha) \tag{5.4.23}$$

由于 $f_i(x;\alpha)$ 和 $\Phi_i(\alpha;\beta)$ 皆为解析函数，故 $U_{ik}(x')$，$\Theta_{im}(\alpha)$ 和 $\Psi_{kt}(\alpha)$ 也必是解析函数，故该定理得证。

李氏第一定理将偏微分方程分解为两个矩阵之积，其中一个仅依赖于群参数 α，另一个只与初条件 x' 有关。这实际是求解常系数联立偏微分方程组 $\frac{\partial x_i}{\partial t}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j(t)$ 的一种推广。

4—3 李氏第二定理和结构常数

李氏第二定理：r 维李群的 r 个生成元 X_μ 的对易关系满足

$$[X_\mu,X_\gamma]=\sum_{\lambda=1}^{r}C_{\mu\gamma}^{\lambda}X_\lambda \tag{5.4.24}$$

其中 $C_{\mu\gamma}^{\lambda}$ 皆为常数。

证明：李氏第一定理可改写为

$$\frac{\partial x_i}{\partial\alpha_t}=U_{ik}(x)\Psi_{kt}(\alpha)\text{（重复指标代表求和）} \tag{5.4.25}$$

其存在满足初条件 $x'_i = f_i(x;\alpha)\Big|_{\alpha=0} = x_i$ 的唯一解的充要条件是

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial\alpha_\lambda\partial\alpha_\mu} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial\alpha_\mu\partial\alpha_\lambda}\text{，即}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_\lambda}\left(\frac{\partial x_i}{\partial\alpha_\mu}\right) = \frac{\partial}{\partial\alpha_\mu}\left(\frac{\partial x_i}{\partial\alpha_\lambda}\right) \tag{5.4.26}$$

利用(5.4.25)式得

$$U_{ik}(x)\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_\lambda}\Psi_{k\mu}(\alpha) - \frac{\partial}{\partial\alpha_\mu}\Psi_{k\lambda}(\alpha)\right] + \left[\frac{\partial}{\partial\alpha_\lambda}U_{ik}(x)\right]\Psi_{k\mu}(\alpha)$$
$$-\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_\mu}U_{ik}(x)\right]\Psi_{k\lambda}(\alpha) = 0 \tag{5.4.27}$$

又因

$$\frac{\partial U_{ik}(x)}{\partial\alpha_\lambda} = \frac{\partial U_{ik}(x)}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial\alpha_\lambda} = \frac{\partial U_{ik}(x)}{\partial x_j}U_{j\gamma}(x)\Psi_{\gamma\lambda}(\alpha)\text{，} \tag{5.4.28a}$$

$$\frac{\partial U_{ik}(x)}{\partial\alpha_\mu} = \frac{\partial U_{ik}(x)}{\partial x_{j'}}U_{j'\gamma'}(x)\Psi_{\gamma'\mu}(\alpha) \tag{5.4.28b}$$

将(5.4.28)式代入(5.4.27)式，并将后两项中的哑指标 $j'\to j$，$\gamma'\to k$，$k\to\gamma$，则得

$$U_{ik}(x)\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_\lambda}\Psi_{k\mu}(\alpha) - \frac{\partial}{\partial\alpha_\mu}\Psi_{k\lambda}(\alpha)\right] + \left[\frac{\partial}{\partial x_j}U_{ik}(x)U_{j\gamma}(x)\right.$$
$$\left.-\frac{\partial U_{i\gamma}(x)}{\partial x_j}U_{jk}(x)\right]\Psi_{k\mu}(\alpha)\Psi_{\gamma\lambda}(\alpha) = 0 \tag{5.4.29}$$

利用 $\Psi(\alpha)\Theta(\alpha) = I$，即 $\Psi^{(\alpha)}_{k\mu}\Theta^{(\alpha)}_{\mu\lambda} = \delta_{k\lambda}$，上式可化为

$$\left[\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_j}U_{j\gamma} - \frac{\partial U_{i\gamma}}{\partial x_j}U_{jk}\right]\Psi_{k\mu}\Theta_{\mu\tau}\Psi_{\gamma\lambda}\Theta_{\lambda\sigma} = U_{ik}\left(\frac{\partial\Psi_{k\lambda}}{\partial\alpha_\mu} - \frac{\partial\Psi_{k\mu}}{\partial\alpha_\lambda}\right)\Theta_{\mu\tau}\Theta_{\lambda\sigma}$$

所以 $\quad\dfrac{\partial U_{i\tau}}{\partial x_j}U_{j\sigma} - \dfrac{\partial U_{i\sigma}}{\partial x_j}U_{j\tau} = U_{ik}\left(\dfrac{\partial\Psi_{k\lambda}}{\partial\alpha_\mu} - \dfrac{\partial\Psi_{k\mu}}{\partial\alpha_\lambda}\right)\Theta_{\mu\tau}\Theta_{\lambda\sigma}$

若令 $\quad\left(\dfrac{\partial\Psi_{k\lambda}(\alpha)}{\partial\alpha_\mu} - \dfrac{\partial\Psi_{k\mu}(\alpha)}{\partial\alpha_\lambda}\right)\Theta_{\mu\tau}(\alpha)\Theta_{\lambda\sigma}(\alpha) = C^k_{\tau\sigma}(\alpha) \qquad (5.4.30)$

则上式化为

$$U_{j\sigma}\frac{\partial U_{i\tau}}{\partial x_j} - U_{j\tau}\frac{\partial U_{i\sigma}}{\partial x_j} = C^k_{\tau\sigma}(\alpha)U_{ik} \tag{5.4.31}$$

下面看看 $C^k_{\tau\lambda}(\alpha)$ 是否真是群参数 α 的函数。若对上式两边同时求

偏导数$\frac{\partial}{\partial \alpha_\rho}=\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial x_m}{\partial \alpha_\rho}\frac{\partial}{\partial x_m}$，则(5.4.31)式左边和右边分别为

$$左边=\frac{\partial x_m}{\partial \alpha_\rho}\frac{\partial}{\partial x_m}\left[U_{j\sigma}\frac{\partial U_{i\tau}}{\partial x_j}-U_{j\tau}\frac{\partial U_{i\sigma}}{\partial x_j}\right]=\frac{\partial x_m}{\partial \alpha_\rho}C^k_{\tau\sigma}(\alpha)\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_m}$$

$$右边=\frac{\partial}{\partial \alpha_\rho}(C^k_{\tau\sigma}(\alpha)U_{ik}(x))=\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_\rho}C^k_{\tau\sigma}(\alpha)\right)U_{ik}(x)+C^k_{\tau\sigma}(\alpha)\frac{\partial x_m}{\partial \alpha_\rho}\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_m}$$

比较方程两边推得

$$\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_\rho}C^k_{\tau\sigma}(\alpha)\right)U_{ik}(x)=0$$

而$U_{ik}(x)$是线性独立矩阵元，要使上式在任意点 x 都成立，只有

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_\rho}C^k_{\tau\sigma}(\alpha)=0$$

这说明 $C^k_{\tau\sigma}$实际上与群参数无关的常数，故称其为李群的结构常数。

若定义对易关系为

$$[X_\mu,X_\gamma]=X_\mu X_\gamma-X_\gamma X_\mu \tag{5.4.32}$$

则根据线性变换李群生成元的定义式(5.4.8)和(5.4.31)式，再将下式第二项哑指标 i 和 j 互换，则得

$$\begin{aligned}[X_\mu,X_\gamma]&=U_{i\mu}\frac{\partial}{\partial x_i}U_{j\gamma}\frac{\partial}{\partial x_j}-U_{j\gamma}\frac{\partial}{\partial x_j}U_{i\mu}\frac{\partial}{\partial x_i}\\&=\left[U_{i\mu}\frac{\partial U_{j\gamma}}{\partial x_i}-U_{i\gamma}\frac{\partial U_{j\mu}}{\partial x_i}\right]\frac{\partial}{\partial x_j}=C^k_{\mu\gamma}U_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}\end{aligned}$$

所以

$$[X_\mu,X_\gamma]=C^k_{\mu\gamma}X_k \tag{5.4.33}$$

可见 r 维李群的任意两个生成元的对易关系皆为这 r 个生成元的常系数线性组合。前面曾给出 $SO(3)$和 $GL(2,R)$李群的生成元，读者不难求得它们的对易关系。

4—4 李氏第三定理和李代数

李群的结构常数满足以下二个性质，称之李氏第三定理：

1° $C^\lambda_{\mu\gamma}+C^\lambda_{\gamma\mu}=0 \quad (5.4.34)$

2° $C^{\tau}_{\mu\nu}C^{\rho}_{\tau\lambda}+C^{\tau}_{\nu\lambda}C^{\rho}_{\tau\mu}+C^{\tau}_{\lambda\mu}C^{\rho}_{\tau\nu}=0$ (5.4.35)

证明：利用对易关系定义式(5.4.32)，可得

$$[X_\mu, X_\nu]+[X_\nu, X_\mu]=0$$

$$[[X_\mu, X_\nu], X_\lambda]+[[X_\nu, X_\lambda], X_\mu]+[[X_\lambda, X_\mu], X_\nu]=0 \tag{5.3.36}$$

将(5.4.33)式代入以上两式，则可分别证明李氏第三定理。通常称(5.4.35)和(5.4.36)式为雅可比恒等式。

定义：设 g 是数域 K(实数域 R、复数域 C 或其它数域)上的 r 维矢量空间，对于 $A,B\in g$，若定义其李积 $[A,B]\in g$，且满足以下三个条件，则称 g 为一个 r 维李代数。

1° 双线性。对于 $\alpha,\beta\in K$，$A,B\in g$，有

$$[\alpha A+\beta B, C]=\alpha[A,C]+\beta[B,C]$$

$$[C,\alpha A+\beta B]=\alpha[C,A]+\beta[C,B] \tag{5.4.37a}$$

2° 幂零性。对于任意 $A\in g$，有

$$[A,A]=0 \tag{5.4.37b}$$

3° 雅可比性。对于 $A,B,C\in g$，有

$$[[A,B],C]+[[B,C],A]+[[C,A],B]=0 \tag{5.4.37c}$$

显然由 $[A+B, A+B]=0$ 可推得 $[A,B]=-[B,A]$，即李积的幂零性和反对称性是等价的。

由李代数的定义和李氏三定理可看出，一个 r 维李群 G，若选取其全部生成元 $X_\mu(\mu=1,2,\cdots,r)$ 是矢量空间的基，则集合 $g=\{\alpha_\mu X_\mu | \alpha\in R\}$ 将构成一个 r 维矢量空间，若进一步定义其中任意二个元素 X 和 Y 的李积恰为两者之对易关系，即 $[X,Y]=XY-YX$，则不难看出 g 为一个李代数。因 $\alpha_\mu\in R$，故称 g 为该李群 G 相应的实李代数，通常称之李群的线性化。一个 r 维李群，其相应李代数也是 r 维的，任意二个生成元之李积必为这些生成元的线性组合，而 r^3 个结构常数将决定该李代数的结构，且这个李代数由所给李群唯一确定。下面还将看到，这些结构常数将提供该李代

数的一个 r 维伴随表示(正则表示)。

4—5 李氏三定理的逆定理

李氏三定理给出了李群和李代数的密切关系，每个李群必存在一个相应的李代数；自然人们要问，对于一个给定李代数，是否也必存在相应的李群？其答案将由李氏三定理的逆定理给出。下面只给出这三个逆定理的表述，对证明感兴趣的读者可参阅有关文献。

李氏第一定理的逆定理：

设 $\gamma_\mu=\Phi_\mu(\beta;\alpha)$ $(\mu=1,2,\cdots,r)$ 为 $2r$ 个变量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 的函数；而 $x_i'=f_i(x;\alpha)$ $(i=1,\cdots,n)$ 为 $(r+n)$ 个变量 $x_1,\cdots,x_n$ 和 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 的函数，若它们满足以下二个条件：

1° $\dfrac{\partial x_i'}{\partial \alpha_\gamma}=\sum\limits_{k=1}^{r}\Psi_{\lambda k}(\alpha)U_{ik}(x')$，其中，

$$\Theta_{k\lambda}(\alpha)=\left.\frac{\partial\Phi_k(\beta;\alpha)}{\partial\alpha_\lambda}\right|_{\beta=0}\xrightarrow{\alpha\to 0}\delta_{k\lambda}$$

$$\Psi_{k\lambda}(\alpha)=\Theta_{k\lambda}^{-1}(\alpha)$$

$$U_{ik}(x)=\left.\frac{\partial f_i(x;\beta)}{\partial\beta_k}\right|_{\beta=0}$$

2° $\Phi_\mu(\beta;\alpha)$、$f_i(x;\beta)$，$\Theta_{k\lambda}(\alpha)$和 $U_{ik}(x)$在 $\beta=\alpha=0$ 和 $x=0$ 邻域内是解析函数，则有以下结论：

1° 这 r 个函数 $\Phi_\mu(\beta;\alpha)$是某个定域李群的结构函数，该李群的生成元为

$$X_\mu=\sum_{\lambda=1}^{r}\Theta_{\mu\lambda}(\alpha)\frac{\partial}{\partial\alpha_\lambda}$$

2° 这 n 个函数 $f_i(x;\beta)$将构成一个线性变换李群，其相应生成元为

$$X_\mu=\sum_{i=1}^{n}U_{i\mu}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

李氏第二定理的逆定理：如果有 r 个解析无穷小算符 X_μ 构成一个实李代数 $g=\{X_\mu\}$，则必存在一个 r 维李群 G，且 G 的 r 个生成元将构成与 g 定域同构的李代数。

李氏第三定理的逆定理：设 g 为实数域上 r 维抽象李代数，则必存在一个相应的 r 维单连通李群 SG，且 SG 李代数与 g 同构，在定域解析同构的意义下，这个李群是唯一被给定的李代数所决定。

从以上讨论可看出，李代数和李群间并不存在 1—1 的对应关系，可能同时有若干个李群都具有相同的李代数，这些具有相同李代数的李群仅是定域同构的，但其整体上并不同构（例如其群参数的定义域不相同），而这些具有相同李代数的定域同构李群中只有一个是单连通李群 SG，通常称 SG 为通用覆盖群（我们称李群 G 为 H 的覆盖群，是指 G 与 H 不仅定域同构，且存在由 G 到 H 的同态映射）。

为了进一步阐明李群和李代数的对应关系，下面直接给出一个定理：设 f 为李群 G 到 H 上的一个覆盖同态映射（即 G 是 H 的覆盖群），则 f 的同态核 D 是群 G 的分立不变子群，而且商群 G/D 和群 H 同构。由该定理和李氏第三定理的逆定理不难看出，一个 r 维实李代数 A 将唯一决定一个单连通李群 SG，设与 SG 定域同构的连通李群为 $G_1,G_2,\cdots,G_n$，则必有 SG 到 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 的对应同态映射分别为 $f_1,f_2,\cdots,f_n$，而且还可进一步证明，从 SG 到 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 的同态映射的同态核是分立的，即 f_i 的同态核 D_i 是 SG 的分立不变子群。即对于 $D_i=\{d_\mu\}$，存在 $gd_\mu g^{-1}=d_\mu$，而 $g\in SG$的任意元素，称 D_i 为 SG 的一个中心，其对应商群 $G_i=SG/D_i(i=1,2,\cdots,n)$与 SG 是定域同构的，即在单位元素附近它们有相同的实李代数。其中只有 SG 是唯一单连通群，其它 G_i 皆为复连通的。因此要寻求具有相同李代数所相应的一切可能李群，实际就是求具有此李代数的单连通群及其可能包含的一切分立不变子

群，它们可以与每个群元 $g\in SG$ 对易的全体分离元素集$\{d_\mu\}$来求得。显然，集合$\{d_\mu\}$形成 SG 的分离不变子群，而 D 的任何一个子群又是 SG 的分离不变子群，且 SG 的任何分离不变子群也是 D 的子群。

设有一个 2 维李群，其元素为

$$g=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(a>0) \tag{5.4.38}$$

不难推得其相应李代数满足

$$[X_1,X_2]=X_2 \tag{5.4.39}$$

我们想知道是否有另外李群也有(5.4.39)式结构的李代数，则要求与 g 对易的一切分离群元 $d=\begin{pmatrix} d_{11}, & d_{12} \\ d_{21}, & d_{22} \end{pmatrix}$。由 $gd=dg$ 推得

$$\begin{pmatrix} ad_{11}+bd_{21}, & ad_{12}+bd_{22} \\ d_{21}, & d_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_{11}a, & d_{11}b+d_{12} \\ d_{21}a, & d_{21}b+d_{22} \end{pmatrix} \tag{5.4.40}$$

显然要使上式对任何数值 a 和 b 皆成立，只有 $d_{12}=d_{21}=0$，$d_{11}=d_{22}$，又因 d 自身也是该群元素，只能是 $d_{22}=d_{11}=1$，故此群除单位元素外，没有分离不变子群，即具有(5.4.39)式结构的李代数只有唯一的李群相对应。因此对李群的分类实际上就简化为以下两个较简单的问题：

1° 首先对一切李代数进行分类，则每个李代数都唯一对应一个单连通李群 SG。

2° 找出 SG 所包含的一切可能分离不变子群。

4—6 泰劳(Taylor)定理

虽然前面已建立起单连通李群和李代数之间的一一对应关系，但并没有给出由李代数来确定李群结构函数的方法，这将由泰劳定理来实现。

若已知一个 r 维实李代数 $g=\{X_\mu\}(\mu=1,2,\cdots,r)$，则必存在唯一的 r 维单连通李群 SG，其 r 个生成元正是 X_μ，因为

$$X_\mu=U_{i\mu}(x)\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{5.4.41}$$

则李氏第一定理可表为

$$\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_\lambda}=\Psi_{\lambda\sigma}(\alpha)U_{i\sigma}(x)=\Psi_{\lambda\sigma}X_\sigma x_i \tag{5.4.42}$$

如果只考虑沿着过群流形原点某一直线的变换，若该直线单位方向矢量为 S_λ，则群元只依赖于某单参数 $\alpha_\lambda=S_\lambda\tau$，故(5.4.42)式可表为

$$\frac{\mathrm{d}x_i(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_\lambda}\frac{\partial \alpha_\lambda}{\partial\tau}=S_\lambda\Psi_{\lambda\sigma}X_\sigma x_i(\tau) \tag{5.4.43}$$

从起点 $x(0)$ 在 $g(\alpha_\lambda)$ 作用下变为某点 $x(\tau)$ 的第 i 分量 $x_i(\tau)$ 可表示为

$$x_i(\tau)=[g(\alpha_\lambda)x(0)]_i=\sum_j T_{ij}(\tau)x_j(0) \tag{5.4.44}$$

故(5.4.43)式可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}T_{ij}(\tau)x_j(0)=S_\lambda\Psi_{\lambda\sigma}(\alpha=s\tau)X_\sigma[x(\tau)]T_{ij}(\tau)x_j(0)$$

而 $x_j(0)$ 是任意的，故上式成立的条件为

$$\frac{\mathrm{d}T_{ij}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=S_\lambda\Psi_{\lambda\sigma}(\alpha=s\tau)X_\sigma[x(\tau)]T_{ij}(\tau) \tag{5.4.45}$$

上式是满足初条件 $T_{ij}(0)=\delta_{ij}$ 的矩阵 $T_{ij}(\tau)$ 的一阶全微分方程。

$$\left.\frac{\mathrm{d}T_{ij}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=0}=S_\lambda\Psi_{\lambda\sigma}(0)X_\sigma[x(0)]T_{ij}(0)=S_\lambda X_\lambda[x(0)]\delta_{ij}$$

因 S_λ 是固定某方向的单位矢量，故上式不对 λ 求和。满足(5.4.45)式和上式的解为

$$\begin{aligned}T_{ij}(\tau)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\{\tau S_\lambda X_\lambda[x(0)]\delta_{ij}\}^n\\&=\exp\{\tau S_\lambda X_\lambda(x)\delta_{ji}\}=\delta_{ji}\exp\{\alpha_\lambda X_\lambda(x)\},\end{aligned} \tag{5.4.46}$$

此解是唯一的，对于该直线上的两个变换 $g(\alpha_\lambda=S_\lambda\alpha)$ 和 $g(\beta_\lambda=S_\lambda\beta)$，则有

$$g(\alpha_\lambda)\cdot g(\beta_\lambda)=e^{\alpha_\lambda X_\lambda}\cdot e^{\beta_\lambda\cdot X_\lambda}=e^{S_\lambda(\alpha+\beta)X_\lambda}=g(\beta_\lambda)\cdot g(\alpha_\lambda)$$

可见通过群流形原点的任何一直线上的变换，皆对应着此李群上的一个1维阿贝尔子群，称此为李群的泰劳定理。

例如，设有一个2维李代数为 $X_1=x\dfrac{\partial}{\partial x}$，$X_2=\dfrac{\partial}{\partial x}$，首先取群流形沿直线 $\tau S_\lambda=\tau(\alpha_1,0)$ 变换，由(5·4·46)式可知

$$g(\alpha_1)=e^{\alpha_1 x\frac{\partial}{\partial x}}$$

$$x'=g(\alpha_1)x=e^{\alpha_1 x\frac{\partial}{\partial x}}x=e^{\alpha_1}x$$

而沿直线 $\tau S_\lambda=\tau(0,\alpha_2)$ 变换时，其相应群元为

$$g(\alpha_2)=e^{\alpha_2\frac{\partial}{\partial x}},$$

$$x'=g(\alpha_2)x=x+\alpha_2$$

若沿直线 $\tau S_\lambda=\tau(\alpha_1,\alpha_2)$ 变换时，则相应群元为

$$g(\tau)=\exp\left\{\tau\left[\alpha_1 x\frac{\partial}{\partial x}+\alpha_2\frac{\partial}{\partial x}\right]\right\}=e^{\tau\sum\limits_{\lambda=1}^{2}(\alpha_\lambda X_\lambda)},$$

所以 $$x'=g(\tau)x=e^{\tau\alpha_1}x+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}(e^{\tau\alpha_1}-1)$$

若令 $a=e^{\tau\alpha_1}$，$b=\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}(e^{\tau\alpha_1}-1)$，不难看出这个2维李群与前面讨论的2维李群 $x'=ax+b$ 是一样的，故其结构函数不难求得。

以上泰劳定理的证明，只涉及流形上过原点($\alpha^0=0$)到某点 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$ 沿直线积分，但可以证明沿着原点到 α 点的任意一条连续曲线积分也成立，有兴趣的读者可参读 R·Gilmore 书第四章Ⅵ节。虽然上述泰劳定理对李群是一个很有用的结论，但一般讲它并不能确保将任何群元都表示为该李代数某些元素的幂指数形式，因为有些李群的群元对应的参数在其群流形中与原点之间并不存在连续的直线，为此引入下面定理将使泰劳定理变得更为有力和实用。

广义泰劳定理：紧致李群的每个群元必是其某个1维阿贝尔子群的元素，且该李群的群元皆可表示为其相应李代数的每个元

素的幂指数形式(指数化)。

此定理仅适合于紧致李群,因此研究紧致李群较非紧致李群更简单些。这样具有相同李代数的李群与其李代数之间的密切关系可用图5.7清楚地阐明,从以上讨论可看出,欲求所有的相互不同构李群,则变成了解决以下三个较简单的问题:

(1)求出所有相互不同构的实李代数 A;

(2)求出以 A 为李代数的单连通李群 SG;

(3)求出 SG 的所有分立不变子群 D_i,那么 $G_i=SG/D_i$ 和 SG 就是以 A 为李代数的相互整体不同构的连通李群,从而把求不同构的各种李群问题简化为所有不同构的实李代数问题。

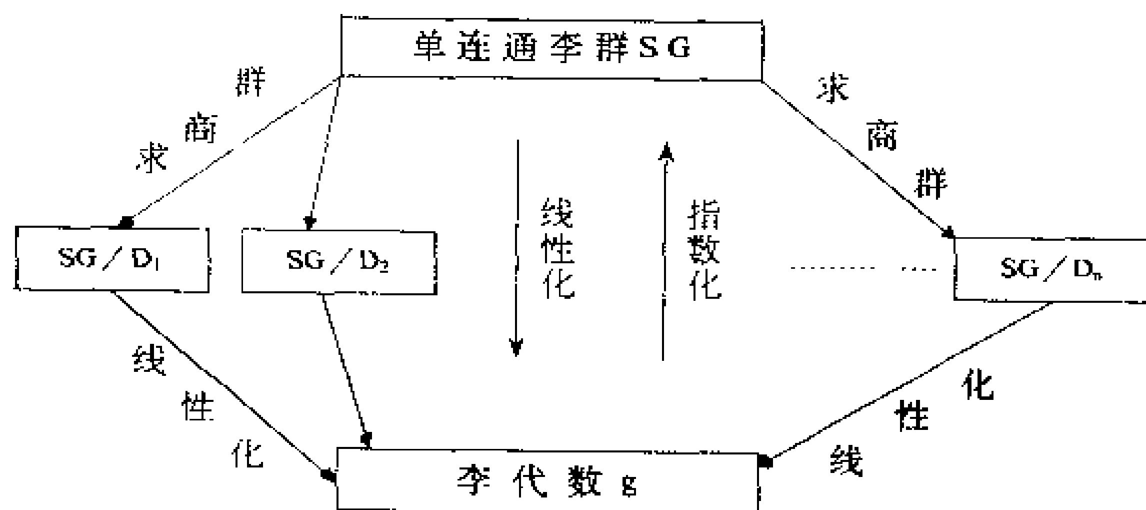


图5.7 李群和李代数的对应关系

事实上,要想由李代数 g 生成对应李群 G 的元素,通常可选择适当的群参数并进行指数化,群参数的选择并不唯一,但要避免在单位元附近有奇点。若以李代数的矩阵表达式作为生成元,通过对矩律的指数映射,则可得到与单位元连通的任意群元。

例如,对于幺模线性群 $SL(n,c)=\{A\in GL(n,c)\mid \det A=1\}$,其相应李代数生成元 $X\in sl(n,c)$,则可形成相应群元 $\exp(\lambda X)\in SL(n,c)$($\lambda$ 为实数),因其幺模性要求

$$\det\{\exp(\lambda X)\}=\exp(\lambda \mathrm{tr}X)=1$$

即 $\mathrm{tr}X=0$，故其相应李代数为

$$sl(n,c)=\{X\in gl(n,c)\mid \mathrm{tr}X=0\}$$

如幺模幺正群 $SU(n)=\{A\in GL(n,c)\mid \det A=1,A^+A=E_{n\times n}\}$，$E_{n\times n}$为 n 维单位矩阵，若 X 为其相应李代数元素，即$X\in su(n,c)$，则有 $\exp(\lambda X)\in SU(n,c)$（$\lambda$ 为实数），由其幺模幺正性得

$$\det\{\exp(\lambda X)\}=1\Rightarrow \mathrm{tr}X=0,$$

$$[\exp(\lambda X)]^+[\exp(\lambda X)]=\exp[\lambda(X^++X)]=E_{n\times n}\Rightarrow X^+=-X,$$
故有幺模幺正李代数 $su(n)=\{X\in gl(n,c)\mid X^+=-X,\mathrm{tr}X=0\}$一般物理书上的指数映射常改写为 $\exp(-i\lambda X)$，这样李代数 $su(n)$中的生成元 X 便是厄米的，这主要是 X 可方便地对应可观察物理量算符，而对结果并没有什么影响。

习　题　五

5—1　求变换群

$$\begin{cases}x'=ax+by\\ y'=\dfrac{1}{a}y\end{cases}$$

的单位元素和逆元素，它是否为阿贝尔群？

5—2　试求出下列变换群的生成元：

$$(1)\begin{cases}x'=ax\\ y'=by\end{cases}\qquad (2)\begin{cases}x'=ax\\ y'=\dfrac{1}{a}y\end{cases}$$

5—3　计算 $O(4)$群的生成元及其对易关系。

5—4　n 维实空间旋转群 $SO(n)$有几个生成元？试写出一般形式。

5—5　保持二次型$-\sum_{i=1}^{p}x_i^2+\sum_{j=p+1}^{p+q}x_j^2$不变的幺模线性变换群称之 $SO(p,q)$群，它有多少个生成元？试求出 $SO(2,1)$的生成元及其对易关系。

5—6 如下变换形成平面欧基里德变换群 E_2，

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta + a,$$

$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta + b$$

θ 是平面内绕原点的转角，a 和 b 分别为沿 x 和 y 轴方面的平移。

(1)写出平面内一点 $(x,y,1)$ 到另一点 $(x',y',1)$ 的变换矩阵。

(2)求 E_2 群对应的李代数及其结构。

5—7 证明实数加法群 R_1 唯一分离不变子群与整数群 N 同构。

5—8 证明实 2 维线性群 $GL(2,R)$ 中，元素

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{a} \end{bmatrix}, a>0, a\neq 1$$

与其对应李代数 $gl(2,R)$ 元素之间不存在指数映射。

5—9 设 $SU(3)$ 群的无穷小群元 $g(\delta\alpha)$ 以 8 个无穷小实参数 $\delta\alpha_1=c_1, \alpha\delta_2=c_2, \cdots, \delta\alpha_8=c_8$ 表示

$$g(\delta\alpha)=\begin{bmatrix} 1+ic_1 & c_2+ic_3 & c_4+ic_5 \\ -c_2+ic_3 & 1+ic_6 & c_7+ic_8 \\ -c_4+ic_5 & -c_7+ic_8 & 1-ic_1-ic_6 \end{bmatrix}$$

试求出相应李代数的矩阵形式生成元。

5—10 设 $g(a)$ 和 $g(b)$ 是李群 G 的两个无穷小元素，求证

$g(a)\cdot g(b)g(\bar{a})g(\bar{b})=1+a_\mu b_\nu(X_\mu X_\nu - X_\nu X_\mu)$ 其中 $g(\bar{a})$ 和 $g(\bar{b})$ 分别为 $g(a)$ 和 $g(b)$ 的逆元素，$X_\mu(\mu=1,2,\cdots,r)$ 是 G 的生成元。

5—11 证明一个 r 维李代数其基矢 X_μ 作如下变换时，新基矢 X'_μ 对应的结构常数 $C'^\lambda_{\mu\nu}$ 也满足雅可比恒等式。

$$X'_\mu=\sum_{\rho=1}^{r} a_{\mu\rho}X_\rho, [X'_\mu, X'_\nu]=\sum_{\nu=1}^{r} C'^\lambda_{\mu\nu}X'_\nu$$

5—12 写出李代数 $sp(2)$ 的无穷小生成元，并证明李代数 $sp(2)$ 与 $O(3)$ 同构。

第六章　半单李代数的正则形式及其根图

前章已阐明了李群和李代数的密切关系，以后只需集中精力研究李代数及其表示，而李代数只存在有限个生成元，尤其是当需要求李群一切不可约幺正表示时，只需探讨更简单的对应李代数的厄米矩阵表示，从而可简化对李群的研究。

第四章曾系统地讨论了物理上常用的各种线性群，借助杨氏对称化算子及群代数，讨论了线性群的各种不可约张量表示及其直积约化问题。本章不仅要对各种单李群进行系统分类，并以根权理论来研究各种李代数的根权性质及其表示的权空间，特别是物理学家最感兴趣的半单李代数做了较详细的讨论。以上两种李群研究方法是平行发展而相辅相承的，对应用李群来解决具体物理问题都是十分有益的。

§6.1　基本概念

定义 6.1：如果 B 是李代数 A 的子集，且对于任意的 $X,Y\in B$，在 A 的李积运算下皆满足 $[X,Y]\in B$，则称 B 为 A 的子代数。

如果 B 为 A 的子代数，且对任意 $X,Y\in B$，皆满足 $[X,Y]=0$ 则称 B 这 A 的阿贝尔子代数。

定义 6.2：设 B 为李代数 A 的子代数，且对任意的 $X\in B$，$Y\in A$，都有 $[X,Y]\in B$，则称 B 为 A 的不变子代数或理想子代数（简称理想）。

设 A 是李代数，如有 $Z\in A$，对所有 $X\in A$ 皆满足 $[Z,X]=0$，则 A 中所有 Z 的集合 $C=\{Z\}$ 是 A 的极大阿贝尔不变子代数，又

称 C 为 A 的中心。

定义 6.3：如果李代数 A 的两个不变子代数 A_1 和 A_2 满足 $A=A_1\cup A_2$，$A_1\cap A_2=\Phi_0$，则称 A 为 A_1 和 A_2 的直和，并记为 $A=A_1\oplus A_2$。类似地可将此定义推广到若干个不变子代数之直和，如果 $A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$；且 $A_i\cap A_j=\Phi$。$(i,j=1,2,\cdots,n)$，$i\neq j$，则有

$$A=A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_n \tag{6.1.1}$$

定义 6.4：设 A_1 和 A_2 是李代数 A 的两个子代数，如果 $A=A_1\cup A_2$，$A_1\cap A_2=\Phi$。且满足 $[A_1,A_1]\in A_1$，$[A_2,A_2]=A_2$，$[A_1,A_2]=A_1$，则称 A 为 A_1 和 A_2 的半直和，并记为

$$A=A_1\oplus_s A_2 \tag{6.1.2}$$

显然 A_1 为 A 的不变子代数，而 A_2 仅是 A 的子代数，它并非是不变子代数。

定义 6.5：设 A 和 A' 是两个李代数，如果存在一个从 A 到 A' 的映射 f 满足：

1° f 是 1—1 满映射，且对于 $a,b\in C$；$X,Y\in A$；$f(X),f(Y)\in A'$ 有

$$f(aX+bY)=af(X)+bf(Y) \tag{6.1.3a}$$

2° $$f([X,Y])=[f(X),f(Y)] \tag{6.1.3b}$$

则称李代数 A 与 A' 同构，并记为 $A\cong A'$，称 f 为同构映射。前面讨论的 $SU(2)$ 和 $O(3)$ 群对应的李代数即为同构的。显然，两个同构的抽象李代数具有完全相同的代数结构，而研究李代数的基本问题之一就是求出所有可能的互不同构的李代数。

定义 6.6：设 A 和 A' 是两个李代数，如果存在一个从 A 到 A' 的满映射 P 满足：

1° $P(aX+bY)=aP(X)+bP(Y)$，对于 $a,b\in C$；$X,Y\in A$；$P(X),P(Y)\in A'$ (6.1.4a)

2° $$P([X,Y])=[P(X),P(Y)] \tag{6.1.4b}$$

则称 A 与 A' 同态，称 P 为同态映射；而 A 中映射到 A' 中零元素

的全体集合 B 称之该映射的同态核。不难证明 B 是 A 的一个理想。

以上讨论的子代数，不变子代数、直和、同构、同态和同态核分别与群的子群，不变子群、直积、同构、及同态核定理一一对应。为了对所有不同构李代数进行分类，还从李代数中区分出单李代数，半单李代数，可解李代数和幂零李代数等，下面将逐一介绍这些概念。

定义 6.7：没有固有不变子代数的李代数称之单纯李代数，或简称单李代数。即除自身和零元之外，它不包含任何其它理想。如一维李代数必是单李代数，而维数$\geqslant 2$的阿贝尔李代数都不是单李代数；不包含任何固有的阿贝尔不变子代数的称之半单李代数。显然，除一维李代数外，所有单李代数必是半单的，但半单李代数却不一定是单李代数，因为它可能包含某个非阿贝尔不变子代数。若以小写字母代表李群的相应李代数，下面将会看到 $gl(n,c)$ 不是半单李代数，而 $o(n,c)$，$sl(n,c)$ 和 $sp(n,c)$ 等皆是单李代数，而两个单李代数之直和是半单李代数，如 $o(3)\oplus su(3)$。

设 $g=\{X_\lambda\}$ 为 r 维李代数，$X_\lambda(\lambda=1,2,\cdots,r)$ 为 g 的一组基，则有

$$[X_\rho,X_\sigma]=C^{\tau}_{\rho\sigma}X_\tau \tag{6.1.5}$$

如同线性空间的基矢可进行线性变换一样，李代数的基也是可线性变换的。若取 g 的另一组新基为$\{X'_\sigma\}$，其中

$$X'_\sigma=a_{\sigma\lambda}X_\lambda(a_{\sigma\lambda}\text{为非奇异 } r \text{ 维矩阵的矩阵元}) \tag{6.1.6}$$

由$[X'_\rho,X'_\sigma]=C'^{\tau}_{\rho\sigma}X'_\tau$ 不难推得

$$C'^{\tau}_{\rho\sigma}=a_{\rho\nu}a_{\sigma\lambda}C^{k}_{\nu\lambda}(a^{-1})_{k\tau} \tag{6.1.7}$$

显然由(6.1.6)式定义的这组新基同样满足李代数的三个条件，对于 $r=1$ 李代数，其对易关系为零，相应李群则为单参数阿贝尔群。当 $r=2$ 时，该李代数有两个基 X_1 和 X_2，由$[X_1,X_2]=aX_1+bX_2$，若取 $a=b=0$，这为 2 维阿贝尔李代数，若取 $a\neq 0$，我们可选一组

新基为 $X_1' = aX_1 + bX_2$ 和 $X_2' = \frac{1}{a}X_2$，则有$[X_1', X_2'] = X_1'$，这表明 2 维李代数必包含一个由 X_1' 构成的阿贝尔不变子代数，可见它不是半单李代数，即 2 维李代数不可能是半单的。相应李代数$[X_1, X_2] = 0$ 的变换李群可以 $x' = x + a$ 和 $y' = y + b$ 为例，该变换李群相应的李代数是两个 1 维李代数的直和；而对应$[X_1, X_2] = X_1$ 的变换群可以 $x' = ax + b(a \neq 0)$ 为例，其中 $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$和 $X_2 = x\frac{\partial}{\partial x}$，其中 $x' = x + b$ 就是该群的一个阿贝尔不变子群。

当 $r = 3$ 时，由于结构常数必须满足二次型的雅可比恒等式，讨论起来比较复杂，但可令(6.1.7)式中 $\tau = \sigma$ 并对 τ 求和，则有

$$C_{\rho\tau}^{\tau} = a_{\rho\mu} a_{\tau\lambda} C_{\mu\lambda}^{k} a_{k\tau}^{-1} = a_{\rho\mu} \delta_{k\lambda} C_{\mu\lambda}^{k} = a_{\rho\mu} C_{\mu\lambda}^{\lambda} \tag{6.1.8}$$

从上式可看出，当李代数基改变时，$C_{\mu\lambda}^{\lambda}$如同矢量变换一样，由于 $a_{\rho\mu}$ 可取任意的非奇异矩阵，只要 $C_{\mu\lambda}^{\lambda}$不是全为零，为方便起见，我们总可选取 $a_{\rho\mu}$的一个分量为 1，其余全为零。例如，下面两个李代数结构分别为

$$[X_1, X_2] = X_3, [X_2, X_3] = -X_1, [X_3, X_1] = -X_2$$
$$[Y_1, Y_2] = Y_3, [Y_2, Y_3] = -Y_1, [Y_3, Y_1] = Y_2$$

初看起来这两个李代数结构不同，但若取第二个李代数的基矢变换矩阵为

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

立即可看出这两个李代数结构完全相同。由此可知，李代数的结构常数与其基选取密切相关，如果基选取恰当则可使问题大为简化。下面即将看到，对于复半单李代数通常皆统一地选取正则形式的标准基。

§ 6.2　基林(Killing)型和半单李代数的嘉当(Cartan)判据及其卡塞米尔(Casimir)算子

2—1　基林型和完全反对称结构常数

设 g 为 r 维李代数，必存在 r 个线性独立的基矢 $\{X_\lambda\}$，且满足

$$[X_\mu, X_\nu] = C^\lambda_{\mu\nu} X_\lambda, \quad (\mu, \nu, \lambda = 1, 2, \cdots, r) \tag{6.2.1}$$

由此可定义 g 上的基林型为

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = C^\tau_{\mu\rho} C^\rho_{\nu\tau} \tag{6.2.2}$$

$g_{\mu\nu}$是个 2 阶对称张量，它反映李代数所在的 r 维矢量空间的度规性质，因此又称它为嘉当-基林(Cartan-Killing)度规张量。另外由结构常数还可定义一个全反对称协变结构常数 $C_{\sigma\mu\nu}$，

$$C_{\sigma\mu\nu} = g_{\sigma\lambda} C^\lambda_{\mu\nu} \tag{6.2.3}$$

下面证明 $C_{\sigma\mu\nu}$是一个完全反对称三阶张量。由(6.2.2.)式得

$$C_{\sigma\mu\nu} = C^\tau_{\sigma\rho} C^\rho_{\lambda\tau} C^\lambda_{\mu\nu} = C^\tau_{\sigma\rho} C^\lambda_{\mu\nu} C^\rho_{\lambda\tau} \tag{6.2.4}$$

利用雅可比恒等式和结构常数的反对称性，上式可化为

$$C_{\sigma\mu\nu} = -C^\tau_{\sigma\rho} C^\lambda_{\nu\tau} C^\rho_{\lambda\mu} - C^\tau_{\sigma\rho} C^\lambda_{\tau\mu} C^\rho_{\lambda\nu} = C^\tau_{\sigma\rho} C^\rho_{\mu\lambda} C^\lambda_{\nu\tau} + C^\tau_{\rho\sigma} C^\lambda_{\tau\mu} C^\rho_{\lambda\nu} \tag{6.2.5}$$

显然(6.2.5)式对应指标(σ, μ, ν)轮换是不变的，即

$$C_{\mu\nu\sigma} = C_{\sigma\mu\nu} = C_{\nu\sigma\mu} \tag{6.2.6}$$

由于 $g_{\sigma\lambda}$是对称的，而 $C^\lambda_{\mu\nu}$对指标 μ 和 ν 是反对称的，故有

$$\begin{aligned} &C_{\sigma\nu\mu} = -C_{\sigma\mu\nu}, \\ &C_{\mu\sigma\nu} = C_{\sigma\nu\mu} = -C_{\sigma\mu\nu} \\ &C_{\nu\mu\sigma} = C_{\mu\sigma\nu} = -C_{\sigma\mu\nu} \end{aligned} \tag{6.2.7}$$

可见 $C_{\sigma\mu\nu}$是个完全反对称张量，在对称性分析中利用 $C_{\sigma\mu\nu}$比 $C^\tau_{\mu\nu}$往往更为方便。

2—2 嘉当判据和卡塞米尔算子

定理 6.1(嘉当判据)：李代数 g 为半单的充要条件是其嘉当—基林度规张量非退化，即

$$\det[g_{\mu\nu}]\neq 0 \tag{6.2.8}$$

证明：如果 g 不是半单李代数，那末必包含阿贝尔不变子代数，若以带撇指标来标记这个阿贝尔子代数，因阿贝尔李代数的结构常数恒为零，故有

$$g_{\mu\nu'}=C^{\tau}_{\mu\rho}C^{\rho}_{\nu'\tau}=C^{\tau}_{\mu\rho'}C^{\rho'}_{\nu'\tau}=-C^{\tau}_{\rho'\mu}C^{\rho'}_{\nu'\tau}=-C^{\tau'}_{\rho'\mu}C^{\rho'}_{\nu'\tau'}=0$$

$[g_{\mu\nu}]$是个 2 阶度规张量，即可视为 $r\times r$ 矩阵，由于其第 ν' 列的每个矩阵元全为零，故其行列式必为零；如果它满足(6.2.8)式，则说明 g 不包含阿贝尔不变子代数，即 g 为半单李代数。

既然半单李代数相应的基林型 $g_{\mu\nu}$非退化，则必存在相应的二阶对称逆规度张量 $g^{\nu\rho}$，即

$$g^{\mu\rho}g_{\rho\nu}=\delta^{\mu}_{\nu} \tag{6.2.9}$$

称 $g^{\mu\nu}$为半单李代数逆变基林型，利用(6.2.9)式可将该类李代数的各种张量上下指标交换。

例如，$su(3)$李代数，已知其三个生成元的李代数结构为

$$[X_i,X_j]=\varepsilon_{ijk}X_k,$$

故有

$$g_{ij}=C^{k}_{il}C^{l}_{jk}=-\varepsilon_{ilk}\varepsilon_{jlk}=-2\delta_{ij}$$

$$\det[g_{ij}]=-8\neq 0$$

可知 $su(3)$是半单李代数。

定理 6.2：实李代数为紧致半单李代数的充要条件是其基林型的负定性。即

$$\det[g_{\mu\nu}]<0 \tag{6.2.10}$$

证明从略，下面仅就其负定性做些说明。设 A 为 r 维实李代数，$g_{\mu\nu}$是其基林型。按线性代数可知，实对称矩律 $g_{\mu\nu}$总可通过相似变换

化为对角矩阵，即

$$\tilde{S}[g_{\mu\nu}]S=\begin{pmatrix} d_{11} & & & O \\ & d_{22} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & d_{rr} \end{pmatrix}$$

虽然满足上式的 S 矩阵并不唯一，但著名的惯性定律指出，变换为对角矩阵的 r 个对角元素中，其大于零、小于零及等于零的个数分别是恒定的。如果 r 个对角元都大于零，则称 $g_{\mu\nu}$ 为正定的；若每个矩阵对角元都小于零，则称它为负定的。至于复数域上的李代数，由于基林型的正定性是不确定的，故不可能是紧致李代数。

如果将一个 r 维以 $\{X_\mu\}$ 为基的李代数变为以 $\{Y_\nu\}$ 为基的李代数，其中

$$Y_\nu=a_{\nu\rho}X_\rho$$

则由(6.1.7)式得，其基林型相应变为

$$g_{\mu\nu}\longrightarrow g'_{\mu\nu}=a_{\mu\mu'}a_{\nu\nu'}g_{\mu'\nu'} \tag{6.2.11}$$

对于实李代数 g，总可通过基的实正交变换将基林型对角化。若 g 又是紧致单的，其对角化的对角元必小于零，故可通过某种标度变换将基林型的对角元全化为(−1)，而其非对角元素全为 0，故有

$$C_{\sigma\mu\nu}=g_{\sigma\lambda}C^\lambda_{\mu\nu}=-\delta_{\sigma\lambda}C^\lambda_{\mu\nu}=-C^\sigma_{\mu\nu},$$

因此对紧致半单李代数总可通过基底变换将结构化为

$$[X_\mu,X_\nu]=C^\rho_{\mu\nu}X_\rho=-C_{\rho\mu\nu}X_\rho=-C_{\mu\nu\rho}X_\rho$$

若令 $I_\mu=iX_\mu$，则上式化为

$$[I_\mu,I_\nu]=iC_{\mu\nu\rho}I_\rho \tag{6.2.12}$$

上式说明，对于紧致半单李代数可用完全反对称三阶张量来标征其李代数结构，故有人称 $C_{\mu\nu\rho}$ 为完全反对称结构常数。

设 g 为 r 维半单李代数，若取基矢为 $\{X_\mu\}$ $(\mu=1,2,\cdots,r)$，还可定义一个新算子 C_2，它与 g 的任何元素皆对易，称 C_2 为 g 的卡塞米尔(Casimir)算子。

$$C_2=g^{\rho\sigma}X_\rho X_\sigma \tag{6.2.13}$$

若取 g 的任一基矢 X_τ，则有

$$[C_2, X_\tau] = g^{\rho\sigma}[X_\rho X_\sigma, X_\tau] = g^{\rho\sigma} X_\rho [X_\sigma, X_\tau] + g^{\rho\sigma}[X_\rho, X_\tau]$$

$$X_\sigma = g^{\rho\sigma} C^\lambda_{\sigma\tau}(X_\rho X_\lambda + X_\lambda X_\rho) \qquad (6.2.14)$$

将(6.2.3)式两边乘 $g^{\sigma\lambda}$并对 σ 求和，则得

$$g^{\sigma\lambda} C_{\sigma\mu\nu} = g^{\sigma\lambda} g_{\sigma\tau} C^\tau_{\mu\nu} = C^\lambda_{\mu\nu} = g^{\lambda\sigma} C_{\sigma\mu\nu} \qquad (6.2.15)$$

将上式代入(6.2.14)式得

$$[C_2, X_\tau] = g^{\rho\sigma} g^{\lambda\nu} C_{\nu\sigma\tau}[X_\rho X_\lambda + X_\lambda X_\rho] \qquad (6.2.16)$$

上式右边对指标 ρ 和 λ 是对称的，而 $C_{\nu\sigma\tau}$是完全反对称的，故对指标 ν 和 σ 求和必恒为零，即

$$[C_2, X_\tau] = 0, \qquad (X_\tau \in g \text{ 的任意元素}) \qquad (6.2.17)$$

故半单李代数的卡塞米尔算子与 g 的任意元素都对易。拉卡(Racah)曾建议取如下算符作为 g 的高阶卡塞米尔算子。

$$C_n = C^{\beta_2}_{\alpha_1\beta_1} C^{\beta_3}_{\alpha_2\beta_2} \cdots C^{\beta_1}_{\alpha_n\beta_n} X^{\alpha_1} X^{\alpha_2} \cdots X^{\alpha_n} \qquad (6.2.18)$$

若$\{X_\mu\}$为 g 的一组基，而

$$X^\alpha = g^{\alpha\beta} X_\beta \qquad (6.2.19)$$

不难证明 C_n 与 g 的任何元素皆对易。一个 l 秩的李代数将只有 l 个独立的卡塞米尔算子。

2—3 可解李代数和幂零李代数

给定李代数 $A=\{X_\mu\}(\mu=1,2,\cdots,r)$，若再以这些基的李氏积所得的元素集合作为新李代数 $A^{(1)}$的基，显然在原李代数李氏积运算下，它们满足李代数的三个条件，故称 $A^{(1)}$为 A 的导出李代数。形式上可表示为

$$[A, A] = A^{(1)} \qquad (6.2.20)$$

显然 $A^{(1)}$是 A 的不变子代数。以 2 维实一般线性群 $GL(2,R)$ 为例，其李代数 $gl(2,R)$的四个生成元结构为

$$[X_1, X_2] = -X_2, [X_1, X_3] = X_3, [X_1, X_4] = 0$$

$$[X_2, X_3] = X_4 - X_1, [X_2, X_4] = -X_2, [X_3, X_4] = X_3$$

若取其导出李代数的基为 $Y_1 = X_2, Y_2 = X_3, Y_3 = X_4 - X_1$，则 $\{Y_i\}$ $(i=1,2,3)$ 将形成 $gl(2,R)$ 的一个不变李代数。类似地，我们还可以 $A^{(1)}$ 的基作李氏积而得到另一组新基矢构成 $A^{(1)}$ 的导出李代数 $A^{(2)} = [A^{(1)}, A^{(1)}]$，显然 $A^{(2)}$ 也是 $A^{(1)}$ 和 A 的不变子代数。这样继续下去，将会得到一个不变子代数链，若存在自然数 k，即其第 k 级导出李代数为零时，则称 A 为可解李代数。

$$A^{(k)} = [A^{(k-1)}, A^{(k-1)}] = 0 \tag{6.2.21}$$

如 E_2 群对应的李代数结构为 $[X_1, X_2] = X_3$，$[X_1, X_3] = -X_2$，$[X_2, X_3] = 0$，其一阶导出李代数的基为 X_2 和 X_3，而二阶导出李代数为零，故它是个可解李代数，而 $su(2)$ 是个不可解李代数。

若将李代数 A 的李积记为 $[A, A] = A^{(2)}$，进一步求李积 $[A, A^{(2)}] = A^{(3)}, \cdots, A^{(k)} = [A, A^{(k-1)}]$，如果存在自然数 k，使之

$$A^{(k)} = 0 \tag{6.2.22}$$

则称 A 为幂零李代数。显然，幂零李代数一定可解，但可解李代数却不一定幂零，此外，还可证明可解李代数的子代数也是可解的，幂零李代数的李代数也是幂零的。因此可解李代数和幂零李代数不可能包含任何半单李代数。为了研讨李代数的分类，以下将不加证明地引入两个重要定理。

定理 6.3：李代数 A 为半单的充要条件是它可表为若干个不变子代数的直和，即

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus \cdots \oplus A_n \tag{6.2.23}$$

其中每个不变子代数皆为单李代数。

定理 6.4：任意李代数 A 都可写成一个可解李代数 P 和一个半单李代数 Q 的半直和，即

$$A = P \oplus_s Q \tag{6.2.24}$$

这里 P 是 A 的不变子代数，且必包含阿贝尔不变子代数，因此欲研究全部李代数的分类问题，实际上就是要探讨全部单李代数，下

面即将介绍嘉当和基林早已给出可能存在的四个系列典型李代数 $A_n(n\geqslant1)$，$B_n(n\geqslant1)$，$C_n(n\geqslant2)$，$D_n(n\geqslant3)$和五个例外李代数 G_2，F_4，E_6，E_7，E_8。

§6.3 半单李代数的正则形式

设 g 为 r 维半单李代数，所谓基的正则形式实际是对 r 个基的一种分解，即嘉当分解。这种分解能系统地反映半单李代数的最基本性质，通常选用的嘉当-韦耳（Cartan-Weyl）基和舍瓦累（Chevalley）基都是正则形式的基。

3—1 嘉当子代数和李代数的秩

若将李代数 g 中任一元素（r 维矢量）$A\in g$ 看作算符，则可考虑该算符的本征矢量和本征值。一般讲本征值可能是简并的，称具有相同本征值的线性独立的本征矢个数为其简并度。为了进行基的嘉当分解，首先考虑 r 维李代数 g 上的本征值问题，设 $X_1,X_2,\cdots,X_r$ 是 g 的一组基，对于 $A\in g$，它在 g 上的本征方程为

$$[A,B]=\rho B \tag{6.3.1}$$

其中 $A=\sum_{\mu=1}^{r}a_\mu X_\mu$，而 $B=\sum_{\nu=1}^{r}b_\nu X_\nu$ 称之李代数 g 相对于 A 的本征值为 ρ 的本征矢。代入方程(6.3.1)则有

$$a_\mu b_\nu C_{\mu\nu}^{\lambda}X_\lambda=\rho b_\lambda X_\lambda=\rho b_\nu\delta_\nu^{\lambda}X_\lambda$$

利用 X_λ 的线性独立性可得到

$$(a_\mu C_{\mu\nu}^{\lambda}-\rho\delta_\nu^{\lambda})b_\nu=0$$

上式有非零解的条件是

$$\det\left|a_\mu C_{\mu\nu}^{\lambda}-\rho\delta_\nu^{\lambda}\right|=0 \tag{6.3.2}$$

久期方程(6.3.2)是 ρ 的 r 次方程，它应有 r 个解，每个解称之 g 的一个“根”。对于 r 维李代数，这 r 个根中可能有重根（即本征值

存在简并)。

定理 6.5 (嘉当定理):可适当选取算符 A,若使本征方程(6.3.1)有最多数目的不等根 ρ,则对半单李代数可证明只有 $\rho=0$ 的根才是退化的,称零根的退化度(简并度)l 为李代数的秩,而其它非零根皆为单重根(非简并根)。

若 g 是秩为 l 的李代数,则 A 必有 l 个本征矢 $H_i(i=1,2,\cdots,l)$满足

$$[A,H_i]=0, \qquad i=1,2,\cdots,l \tag{6.3.3}$$

取这 l 个本征矢 H_i 是线性独立的,即

$$[H_i,H_j]=0, \qquad i,j=1,2,\cdots,l \tag{6.3.4}$$

则 $H_i(i=1,2,\cdots,l)$将展开李代数 g 的一个 l 维子空间,它是 A 的本征值为零的子空间,通常称其为 g 的嘉当子代数,并记为 h。显然 h 为阿贝尔子代数,而 A 的一般形式应为

$$A=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i H_i \tag{6.3.5}$$

设(6.3.1)式的其余$(r-l)$个非零根 α 的本征矢为 E_α,则应有

$$[A,E_\alpha]=\alpha E_\alpha \tag{6.3.6}$$

由嘉当定理可知,α 是单重根,全部 E_α 将展开 g 的一个$(r-l)$维的子空间,它是 h 的补空间。嘉当子代数对半单李代数结构研究和单李代数的分类都起着重要作用。

3—2 李代数的正则形式和基林型

李代数的结构决定于它的 r 个生成元的李积,在嘉当分解时,以上只知其嘉当子代数的结构,为此还要进一步探讨$[H_i,E_\alpha]$和$[E_\alpha,E_\beta]$的李积,利用方程(6.3.6)和雅可比恒等式得

$$\begin{aligned}[A,[H_i,E_\alpha]]&=-[H_i,[E_\alpha,A]]-[E_\alpha,[A,H_i]]\\&=\alpha[H_i,E_\alpha]\end{aligned}$$

故$[H_i,E_\alpha]$也是A的本征值为 α 的本征矢,又因 α 为单重根,故只有

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha, \text{即 } C_{i\alpha}^{\lambda} = \alpha_i \delta_\alpha^\lambda \tag{6.3.7}$$

系数 α_i 可视为 H_i 相对于本征矢 E_α 的本征值，利用(6.3.5)，(6.3.6)和(6.3.7)式，立即可得

$$\alpha = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \alpha_i \tag{6.3.8}$$

由子集$\{H_i\}$构成一个 l 维的嘉当子空间，若取每个 $\lambda_i = 1$，由上式可知，根 α 可视为该子空间的一个 l 维矢量，以 $\vec{\alpha}$标记，而 α_i 是 $\vec{\alpha}$在 H_i 方向的协变分量，通常称 $\vec{\alpha}$为根矢量或简称根。再利用雅可比恒等式和(6.3.6)式得

$$\begin{aligned}[A, [E_\alpha, E_\beta]] &= -[E_\alpha, [E_\beta, A]] - [E_\beta, [A, E_\alpha]] \\ &= (\vec{\alpha} + \vec{\beta})[E_\alpha, E_\beta]\end{aligned} \tag{6.3.9}$$

可见$[E_\alpha, E_\beta]$是 A 的本征值为$(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$的本征矢，由半单李代数非零根的单重性可得

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = C_{\alpha-\alpha}^{i} H_i \tag{6.3.10}$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = 0, (\text{若 } \vec{\alpha} + \vec{\beta} \text{不是根}) \tag{6.3.11}$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = C_{\alpha\beta}^{\alpha+\beta} E_{\alpha+\beta} = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta}, (\vec{\alpha} + \vec{\beta} \text{是非零根}) \tag{6.3.12}$$

定理 6.6：若 $\vec{\alpha}$为半单李代数 g 的一个非零根，则$-\vec{\alpha}$也是 g 的一个根。

证明：g 的基林度规张量为

$$g_{\alpha\tau} = g_{\tau\alpha} = C_{\alpha\nu}^{\mu} C_{\tau\mu}^{\nu}$$

若求和指标只在嘉当子空间中取值时以 $i, j, k = 1, 2 \cdots, l$ 代表，若仅在其补空间取值时以 α, β, γ 等代表，这样对指标 ν 和 μ 取值分为三部分，故上式可化为

$$g_{\alpha\tau} = C_{\alpha i}^{\alpha} C_{\tau\alpha}^{i} + C_{\alpha-\alpha}^{i} C_{\tau i}^{-\alpha} + \sum_{\alpha+\beta\neq 0} N_{\alpha\beta} C_{\tau\alpha+\beta}^{\beta} \tag{6.3.13}$$

由此可看出，当 $\tau \neq -\alpha$ 时，$g_{\alpha\tau} = 0$，若 $\vec{\alpha}$是根，而$-\vec{\alpha}$不是根，则必

然有 $\det(g_{\mu\nu})=0$，即其基林型退化，这与 g 为半单李代数相矛盾，故定理得证。

由于可适当取 E_α 的归一化因子，使之

$$g_{\alpha-\alpha}=g_{-\alpha\alpha}=2\alpha_i C^i_{\alpha-\alpha}+\sum_{\beta\neq-\alpha} C^{\alpha+\beta}_{\alpha\beta} C^{\beta}_{-\alpha\ \alpha+\beta}=1 \tag{6.3.14}$$

$$g_{ij}=g_{ji}=C^{\mu}_{i\nu}C^{\nu}_{j\mu}=\sum_{\alpha}\alpha_i\alpha_j \tag{6.3.15}$$

$$g_{\alpha i}=g_{i\alpha}=C^{\nu}_{i\beta}C^{\beta}_{\alpha\nu}=\beta_i\delta^{\nu}_{\beta}C^{\beta}_{\alpha\nu}=\beta_i C^{\beta}_{\alpha\beta}=0 \tag{6.3.16}$$

如果取 $(r-l)$ 个非零根的排列顺序为 $(\rho_1,-\rho_1,\rho_2,-\rho_2,\cdots,\rho_{\frac{r-l}{2}},-\rho_{\frac{r-l}{2}})$，则半单李代数的基林型为

$$(g_{\mu\nu})=\left[\begin{array}{c:cccc} g_{ij} & & & \bigcirc & \\ \hdashline & \begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix} & & \bigcirc & \\ \bigcirc & & \ddots & & \\ & & \bigcirc & & \begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix} \end{array}\right] \tag{6.3.17a}$$

其中 g_{ij} 为 l 维方阵，又因 g 为半单李代数，故

$$\det(g_{\mu\nu})=\det(g_{ij})\neq0,\ (i,j=1,2,\cdots,l) \tag{6.3.17b}$$

因而二阶张量 $g_{\mu\nu}$ 的逆张量 $g^{\mu\nu}$ 存在，而 g_{ij} 可视为由根 α 展开的 l 维根空间的度规张量，因其行列式不为零，故对应的逆度规张量 g^{ij} 也存在，由于

$$C^{\lambda}_{\mu\nu}=g^{\lambda\sigma}C_{\sigma\mu\nu}$$

则结构常数 $C^i_{\alpha-\alpha}$ 可写为

$$\begin{aligned} C^i_{\alpha-\alpha}&=g^{i\sigma}C_{\sigma\alpha-\alpha}=g^{ij}C_{j\alpha-\alpha}=g^{ij}C_{\alpha-\alpha j} \\ &=g^{ij}g_{\alpha\lambda}C^{\lambda}_{-\alpha j}=g^{ij}g_{\alpha\lambda}\alpha_j\delta^{\lambda}_{-\alpha}=g^{ij}g_{\alpha-\alpha}\alpha_j=g^{ij}\alpha_j=\alpha^i \end{aligned}$$

α^i 为根 $\vec{\alpha}$ 的逆变矢量的第 i 分量。因此有

$$[E_\alpha,E_{-\alpha}]=\alpha^i H_i$$

称以上选取的 H_i 和 E_α 为 g 的嘉当-韦耳标准基，半单李代数 g 在此标准基中其正则结构形式为

$$\begin{cases} [H_i, H_j] = 0, (i, j = 1, 2, \cdots, l) \\ [H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha, (i = 1, 2, \cdots, l) \\ [E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha^i H_i \\ [E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta} (\alpha+\beta \neq 0 \text{ 是 } g \text{ 的根}) \\ 0 \quad\quad (\alpha+\beta \text{ 不是根}) \end{cases} \end{cases} \tag{6.3.18}$$

3—3 根矢量的基本性质

既然 g_{ij} 可视为根矢量展开的 l 维根空间的度规张量，故可定义任意两个根矢量 $\vec{\alpha}$ 和 $\vec{\beta}$ 的内积为

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) = g_{ij}\alpha^i\beta^j = g^{ij}\alpha_i\beta_j = \alpha^i\beta_i$$

在此基础上我们进一步研究与根矢性质相关的一些定理和(6.3.18)式中唯一待求的结构常数 $N_{\alpha\beta}$。

定理 6.7：如果 $\vec{\alpha}$ 和 $\vec{\gamma}$ 是 g 的两个非零根，而 $(\vec{\alpha}+\vec{\gamma})$ 不是根，则 $2(\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma})/(\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha})$ 是正整数，且 $\vec{\gamma} - 2(\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma})/(\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}) \cdot \vec{\alpha}$ 也是一个根。

证明：由根的对称性推知 $-\vec{\alpha}$ 也是非零根，利用(6.3.18)式得

$$[E_{-\alpha}, E_\gamma] = N_{-\alpha\gamma} E_{\gamma-\alpha} = E'_{\gamma-\alpha}$$

$$[E_{-\alpha}, E'_{\gamma-\alpha}] = E'_{\gamma-2\alpha}$$

$$\cdots\cdots$$

$$[E_{-\alpha}, E'_{\gamma-j\alpha}] = E'_{\gamma-(j+1)\alpha} \tag{6.3.19}$$

上式中加撇的基代表不考虑这些基的归一化因子。由于根的个数有限，则必存在某个第 s 级(s 为某个正整数)，使之

$$[E_{-\alpha}, E'_{\gamma-s\alpha}] = E'_{\gamma-(s+1)\alpha} = 0 \tag{6.3.20}$$

根据李代数结构，若令

$$[E_\alpha, E'_{\gamma-(j+1)\alpha}] = \mu_{j+1} E'_{\gamma-j\alpha} \tag{6.3.21}$$

一旦取定基矢 $E'_{\gamma-j\alpha}$，则利用雅可比恒等式和(6.3.19)式不难求得上式的结构常数 μ_{j+1} 因为

$$\mu_{j+1}E'_{\vec{\gamma}-j\alpha}=[E_\alpha,[E_{-\alpha},E'_{\vec{\gamma}-j\alpha}]]=-[E_{-\alpha},[E'_{\vec{\gamma}-j\alpha},E_\alpha]]$$
$$-[E'_{\vec{\gamma}-j\alpha},[E_\alpha,E_{-\alpha}]]=[E_{-\alpha},\mu_j E'_{\vec{\gamma}-(j-1)\alpha}]+[\alpha^i H_i,E'_{\vec{\gamma}-j\alpha}]$$
$$=\mu_j E'_{\vec{\gamma}-j\alpha}+(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})E'_{\vec{\gamma}-j\alpha}-j(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha})E'_{\vec{\gamma}-j\alpha} \qquad (6.3.22)$$

故有 $$\mu_{j+1}=\mu_j+(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})-j(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}) \qquad (6.3.23)$$

已知$(\vec{\gamma}+\vec{\alpha})$不是根，当 $j+1=0$ 时，由(6.3.21)式得

$$[E_\alpha,E'_{\vec{\gamma}}]=\mu_0 E'_{\vec{\gamma}-\alpha}=0,\text{即 }\mu_0=0,$$

代入(6.3.23)式，经多次递推不难求得

$$\mu_j=j(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})-\frac{j(j-1)}{\alpha}(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}) \qquad (6.3.24)$$

由(6.3.20)式知，虽然 $E'_{\vec{\gamma}-s\alpha}\neq 0$，但 $E'_{\vec{\gamma}-(s+1)\alpha}=0$，若取(6.3.21)式中 $j=s$(正整数)，则有

$$[E_\alpha,E'_{\vec{\gamma}-(s+1)\alpha}]=\mu_{s+1}E'_{\vec{\gamma}-s\alpha}=0$$

已知 $E'_{\vec{\gamma}-s\alpha}\neq 0$，故只有 $\mu_{s+1}=0$，将其代入(6.3.24)式则有

$$\mu_{s+1}=(s+1)(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})-\frac{(s+1)s}{2}(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha})=0$$

又因 $\vec{\alpha}$为非零根；即$(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha})\neq 0$，故有

$$s=2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})/(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha})\text{(正整数)} \qquad (6.3.25)$$

从(6.3.19)式推知，若 $\vec{\alpha}$和 $\vec{\gamma}$为两个非零根，且$(\vec{\alpha}+\vec{\gamma})$不是根，则必存在与此相关的$(s+1)$个根 $\vec{\gamma},\vec{\gamma}-\vec{\alpha},\vec{\gamma}-2\vec{\alpha},\cdots,\vec{\gamma}-s\vec{\alpha}$，故此定理得证。而称这些根为包含 $\vec{\gamma}$的 $\vec{\alpha}$根链。可将该定理进一步推广，从而得到根的其它相关定理。

定理 6.8：设 $\vec{\alpha}$和 $\vec{\beta}$是半单李代数任意两个非零根，则 $n=2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})/(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha})$是整数，且 $\vec{\beta}-n\vec{\alpha}$也是根。

证明：若$(\vec{\beta}+\vec{\alpha})$不是根，则情况与定理 6.7 相同，自然结果成立。否则由非零根 $\vec{\alpha}$和 $\vec{\beta}$，则知 $\vec{\beta}+\vec{\alpha},\vec{\beta}+2\vec{\alpha},\cdots$也是根，但必然存在某个正整数 m，使之 $\vec{\gamma}=\vec{\beta}+m\vec{\alpha}$是根，而 $\vec{\gamma}+\vec{\alpha}$不再是根。由(6.3.25)式推得。

$$s=\frac{2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})}{(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha})}=\frac{2[\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+m\vec{\alpha})}{(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha})}=2m+\frac{2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})}{(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha})}$$

故有
$$n=\frac{2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})}{(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha})}=s-2m \tag{6.3.26}$$

由上式可看出，n 必为整数。再根据定理 6.7 的$(\vec{\gamma}+\vec{\alpha})$不是根可知，必存在$(s+1)$个根的含 $\vec{\gamma}$的 $\vec{\alpha}$根链：

$$\vec{\gamma}=\vec{\beta}+m\vec{\alpha},\vec{\gamma}-\vec{\alpha}=\vec{\beta}+(m-1)\vec{\alpha},\cdots,\vec{\gamma}-s\vec{\alpha}=\vec{\beta}-k\vec{\alpha}, \tag{6.3.27a}$$

显然，正整数 k 由关系式 $m+k=s$ 决定，代入(6.3.26)式得

$$n=\frac{2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})}{(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha})}=k-m \tag{6.3.27b}$$

可见根矢 $\vec{\beta}-n\vec{\alpha}=\vec{\beta}+(m-k)\vec{\alpha}$属于(6.3.27a)给出的根链中，故它也是根，该定理得证。

定理 6.9：若 $\vec{\alpha}$是半单李代数一个根，那末所有 $\vec{\alpha}$整数倍的矢量 $k\vec{\alpha}$中，只有 $\vec{\alpha}$，0 和$-\vec{\alpha}$是根。

证明：由(6.3.9)式立即推得

$$[A,[E_\alpha,E_\alpha]]=2\vec{\alpha}[E_\alpha,E_\alpha],$$

此式表明，若 $2\vec{\alpha}$是根，则$[E_\alpha,E_\alpha]$应为本征值为 $2\vec{\alpha}$的本征矢，而不应为零。但按李积定义必有$[E_\alpha,E_\alpha]=0$，可见 $2\vec{\alpha}$不是根。进一步对于任何整数 $k>1$，若 $k\vec{\alpha}$是根，则必存在一个包含 $2\vec{\alpha}$的根链，既然 $2\vec{\alpha}$不是根，因而 $k\vec{\alpha}(k>1)$不是根，又因根的对称性可知$-k\vec{\alpha}$也不可能是根。因此只可能存在三个根 $\vec{\alpha}$，0 和$-\vec{\alpha}$。

定理 6.10：设 $\vec{\alpha}$和 $\vec{\beta}$是半单李代数的两个非零根，则含 $\vec{\beta}$的 $\vec{\alpha}$根链所包含根的个数最多是 4 个，因此有

$$\frac{2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})}{(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha})}=s-2m=0,\pm1,\pm2,\pm3 \tag{6.3.28}$$

证明：当 $\vec{\beta}=\vec{\alpha}$时，则含 $\vec{\beta}$的 $\vec{\alpha}$根链只有 $\vec{\alpha}$，0，$-\vec{\alpha}$，定理自然成

立；而当 $\vec{\beta}\neq\vec{\alpha}$时，若含 $\vec{\beta}$的 $\vec{\alpha}$根链有 5 个根为 $\vec{\beta}-2\vec{\alpha},\vec{\beta}-\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\beta}+\vec{\alpha},\vec{\beta}+2\vec{\alpha}$，则相应含$(\vec{\beta}+2\vec{\alpha})$的 $\vec{\beta}$根链中，由于 $\vec{\beta}+2\vec{\alpha}-\vec{\beta}=2\vec{\alpha}$和 $\vec{\beta}+2\vec{\alpha}+\vec{\beta}=2(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$都不是根，所以含$(\vec{\beta}+2\vec{\alpha})$的 $\vec{\beta}$根链只有一个根 $\vec{\beta}+2\vec{\alpha}$，故由定理 6.8 推知$[(\vec{\beta}+2\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}]=0$，同理含$(\vec{\beta}-2\vec{\alpha})$的 $\vec{\beta}$根链中也只有一个根$(\vec{\beta}-2\vec{\alpha})$，故有$[(\vec{\beta}-2\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}]=0$，由这两式不难推得$(\vec{\beta}\cdot\vec{\beta})=0$，这与 $\vec{\beta}$为非零根的条件相矛盾。这说明含 $\vec{\beta}$的 $\vec{\alpha}$根链最多有 4 个根，即根链中的$(s+1)$个根满足 $s=m+k\leqslant 3$，故有 $m\leqslant 3$ 和 $k\leqslant 3$，相应只有

$$\frac{2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})}{(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha})}=0,\pm1,\pm2,\pm3, \tag{6.3.29}$$

至此，整个半单李代数还有一个结构常数 $N_{\alpha,\beta}=C_{\alpha\beta}^{\alpha+\beta}$有待确定，通过具体计算(参阅 R. Gilmore 书 265 页)，可得到 $N_{\alpha,\beta}$满足下面的对称关系

$$N_{\alpha,\beta}=-N_{\beta,\alpha}=N_{\beta,-\alpha-\beta}=N_{-\alpha-\beta,\alpha} \tag{6.3.30a}$$

并规定相因子使之

$$N_{\alpha,\beta}=-N_{-\alpha,-\beta}=N_{-\beta,-\alpha} \tag{6.3.30b}$$

设 $\vec{\alpha}$和 $\vec{\beta}$是两个非零根，若存在两个正整数 m 和 k，使之 $\vec{\beta}+m\vec{\alpha}$是根，而 $\vec{\beta}+(m+1)\vec{\alpha}$不是根；$\vec{\beta}-k\vec{\alpha}$是根，而 $\vec{\beta}-(k+1)\vec{\alpha}$不是根，则立即可求得

$$N_{\alpha,\beta}=\sqrt{\frac{m(k+1)(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha})}{2}} \tag{6.3.30c}$$

总之，对于一个 l 秩 r 维的半单李代数 g，可取其 r 个基为 $H_1,H_2,\cdots,H_l,E_\alpha,E_{-\alpha},E_\beta,E_{-\beta},\cdots,E_\gamma,E_{-\gamma}$，合理取根的归一化因子使之 $g_{\alpha-\alpha}=1$，称这些基为嘉当—韦耳基，它们满足(6.3.18)式代数结构，其中$\{H_i\}$构成该李代数的一个最大的 l 维嘉当子代数 h，既然 g 是半单的，故 h 不是 g 的不变子代数。在这种正则形式下，其 2 阶卡塞米尔算子应为

$$C_2 = g^{ij}H_iH_j + \sum_{\alpha\neq 0} E_\alpha E_{-\alpha} \tag{6.3.31}$$

§6.4 根图和单李代数分类

4—1 根图和韦耳 Weyl 反射

前节主要讨论了根矢量，归纳起来有以下几个重要性质：

1° 若 $\vec{\alpha}$是根，则$-\vec{\alpha}$也是根；

2° 若 $\vec{\alpha}$和 $\vec{\beta}$是非零根，则 $m=\dfrac{2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})}{(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha})}$和 $n=\dfrac{2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})}{(\vec{\beta}\cdot\vec{\beta})}$皆为整数；

3° 若 $\vec{\alpha}$和 $\vec{\beta}$为非零根，则 $\vec{\beta}-m\vec{\alpha}$和 $\vec{\alpha}-n\vec{\beta}$也是根；

4° 设 φ 为两个非零根 $\vec{\alpha}$和 $\vec{\beta}$之间夹角，则由性质 2°和 3°立即给出

$$\cos^2\varphi = \frac{mn}{4} \tag{6.4.1a}$$

由根的对称性，我们只需考虑其夹角≤90°的两个根，即 $0\leqslant\varphi\leqslant 90°$，由定理 6.10 可知，这时 m 和 n 只能取正整数 0，1，2 和 3。不失普遍性，可令 $m\geqslant n$，则只存在下表所列出的四种可能性：

n	m	φ	两根长比$\dfrac{\lvert\beta\rvert}{\lvert\alpha\rvert}=\sqrt{\dfrac{m}{n}}$
0	0	90°	不定
1	1	60°	1
1	2	45°	$\sqrt{2}$
1	3	30°	$\sqrt{3}$

(6.4.1b)

当 $n=0$ 时，则 m 必为零，否则由性质 2°推得$(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha})=0$，这与$\vec{\alpha}$为非零根矛盾；而当 $n=m=2$ 时，由(6.4.1)式推知 $\varphi=0$，只有 $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$，这不需讨论。不失一般性，我们取 $\vec{\beta}$为长根，$\vec{\alpha}$为短根。由性质

3°可将 $\vec{\alpha}$和 $\vec{\beta}$生成的新根 $\vec{\gamma}$写为

$$\vec{\gamma}=\vec{\beta}-\frac{2(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha})}{(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha})}\vec{\alpha}=\vec{\beta}-2\cos\varphi\frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|}\vec{\alpha} \tag{6.4.2}$$

上式说明根矢 $\vec{\gamma}$为根矢 $\vec{\beta}$和 $-2\frac{|\beta|}{|\alpha|}\cos\varphi\,\vec{\alpha}$的矢量和，其合成矢量如图 6.1 所示。新根矢 $\vec{\gamma}$恰为 $\vec{\beta}$相对于垂直于根矢 $\vec{\alpha}$超平面的镜像，这种以几何方法由根矢 $\vec{\alpha}$和 $\vec{\beta}$求合成根 $\vec{\gamma}$的方法称之韦耳(Weyl)反射。

每个非零根都是李代数嘉当子空间的一个 l(秩)维矢量，每个李代数都将对应其特有的根矢分布图，称它为该李代数的根图。下面将根据根分布的这些性质，对各类情况分别进行讨论。

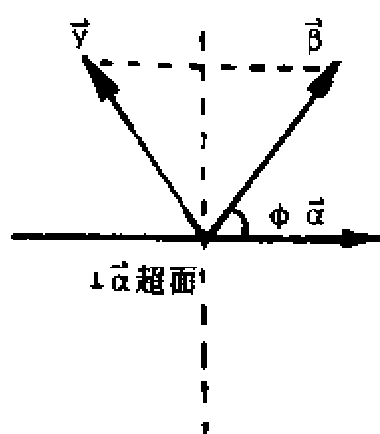


图 6.1 韦耳反射

例 1 对秩 $l=1$ 的单李代数，其嘉当子空间为 1 维，只可能有两个非零根 $\vec{\alpha}$和 $-\vec{\alpha}$，如图 6.2 所示。

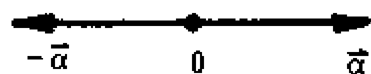


图 6.2

例 2 秩 $l=2$ 的半单李代数，其嘉当子空间是 2 维，可分以下四种情况讨论其根图：

1° $\varphi=30°$。由根的性质可知，$|\vec{\beta}|=\sqrt{3}|\vec{\alpha}|$，若取短根 $\vec{\alpha}$在嘉当子空间中坐标为(1,0)，则长根 $\vec{\beta}$坐标为$\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，由根的对称性又知$-\vec{\alpha}$和$-\vec{\beta}$两个根再通过韦耳反射，立即可得到 12 个非零根，其根图如图 6.3 所示。通常称李代数维数为阶数，这是个 $r=12+2=14$ 阶李代数，以 G_2 代表。

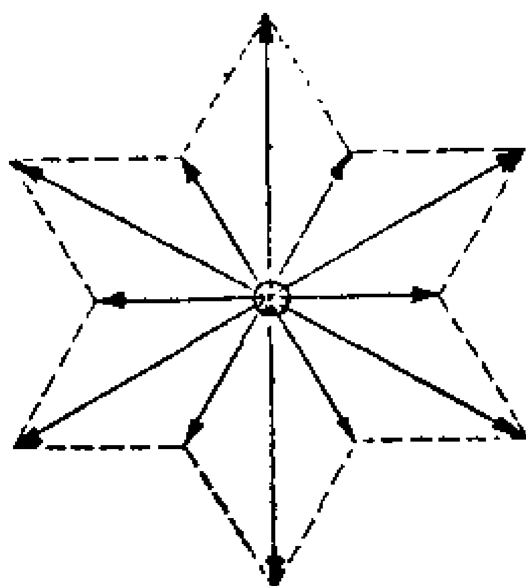


图 6.3 G_2 的根图

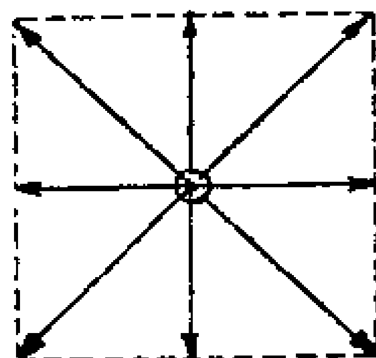


图 6.4a B_2 的根图

2° $\varphi=45°$，$|\vec{\beta}|=\sqrt{2}|\vec{\alpha}|$，由根矢性质立即可作出它的 8 个非零根。$r=8+2=10$，这是个 10 阶李代数，它们的根图如图 6.4a 和 6.4b 所示，分别称为 B_2 和 C_2 李代数。

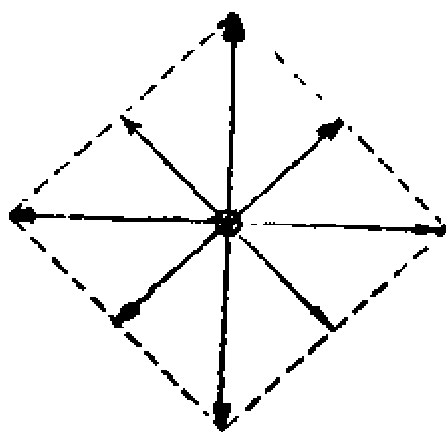


图 6.4b C_2 的根图

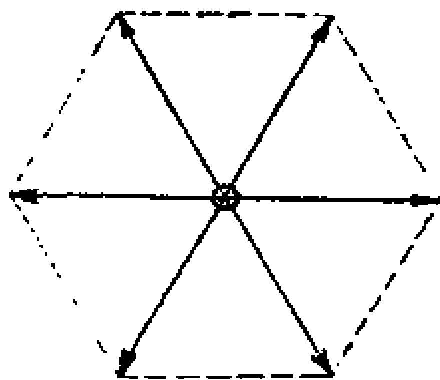


图 6.5 A_2 的根图

3° $\varphi=60°$。所时 $|\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|$，其根图如图 6.5 所示，$r=6+2=8$，以 A_2 代表，A_2 是个 8 阶李代数。

4° $\varphi=90°$。其根图如图 6.6 所示，称它为 D_2 李代数。而 D_2 与李代数 $A_1 \oplus A_1$ 同构，因而 D_2 是一个 6 阶半单李代数，而不是单李代数。

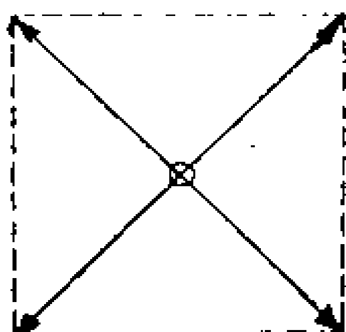


图 6.6　D_2 的根图

4—2　半单李代数的分类

已知任何一个李代数都可写成一个可解李代数和半单李代数的半直和，可解李代数可逐级求其李积而推得它所包含的阿贝尔子代数，而半单李代数总可表为若干个单李代数的直和，每个单李代数的李积仍为其自身，我们已经研讨了半单李代数的正则形式，但至今还没有找到一种普遍的正则形式来描述可解李代数和非半单李代数，故对这类李代数至今还没有完整而系统的分类，好在物理应用中多为半单李代数。上面仅讨论了 $l\leqslant 2$ 的单李代数，下面将对 $l\geqslant 3$ 的高秩半单李代数的分类作系统讨论。

(1)　$B_l(so(2l+1))$李代数

以 B_2 为例，引入 2 维空间的两个正交的单位矢量 $\vec{e}_1=(1,0)$ 和 $\vec{e}_2=(0,1)$。由图 6.4 可知，其 8 个非零根可表为$\pm\vec{e}_1$，$\pm\vec{e}_2$，$\pm\vec{e}_1\pm\vec{e}_2$，其中正负号可任取，它们对应的坐标分别为$(\pm 1,0)$，$(0,\pm 1)$，$(1,\pm 1)$和$(-1,\pm 1)$。这些矢量再加上两个零根矢就构成了 B_2 的根图。

若引入三个相互垂直的单位矢量 $\vec{e}_1=(1,0,0)$，$\vec{e}_2=(0,1,0)$ 和 $\vec{e}_3=(0,0,1)$，则可类似地构成$\pm\vec{e}_i$ 和$\pm\vec{e}_i\pm\vec{e}_j(i\neq j,i,j=1,2,$

3)18 个根矢，再加上三个零根，就构成了 21 阶的 B_3 李代数的根图。因此在 l 维嘉当子空间中，可引入 l 个互相垂直的单位矢量为

$$
\begin{aligned}
&\vec{e}_1=(1,0,\cdots,0)\\
&\vec{e}_2=(0,1,0,\cdots,0)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\vec{e}_l=(0,0,\cdots,1)
\end{aligned}
\tag{6.4.3}
$$

则可类似构成以下 $2l^2$ 个非零根矢 $\pm\vec{e}_i$ 和 $\pm\vec{e}_i\pm\vec{e}_j$，$(i\neq j, i,j=1,2,\cdots,l)$，再加上 l 个零根矢，就构成了 B_l 李代数相应的根图，而 B_l 的阶数为 $2l^2+l=l(2l+1)$。

(2) $C_l(sp(2l))$李代数

若以(6.4.3)式的 l 个单位矢量为基础，还可另外构造 $2l^2$ 个新矢量 $\pm2\vec{e}_i$ 和 $\pm\vec{e}_i\pm\vec{e}_j(i\neq j, i,j=1,2,\cdots,l)$，其两个相邻根矢夹角为 45°，长度比为 $\sqrt{2}$，这就是所谓的 C_l 李代数，其阶数也是 $l(2l+1)$。

(3) $D_l(so(2l))$李代数

从(6.4.3)式给出的 l 个单位矢量，还可构造出 $2l(l-1)$个新矢量 $\pm\vec{e}_i\pm\vec{e}_j(i\neq j, i,j=1,2,\cdots,l)$，其相邻两矢量之间夹角为 90°，长度比为 1，这就构成李代数 D_l，其阶数 $r=2l(l-1)+l=l(2l-1)$。

(4) $A_l(su(l+1))$李代数

若考虑 $l+1$ 维空间中的 $l+1$ 个相互垂直的单位矢量

$$
\begin{aligned}
&\vec{e}_1=(1,0,\cdots,0)\\
&\vec{e}_2=(0,1,0,\cdots,0)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\vec{e}_l=(0,0,\cdots,1,0)\\
&\vec{e}_{l+1}=(0,0,\cdots,0,1)
\end{aligned}
\tag{6.4.4}
$$

则可得到 $l(l+1)$ 个非零矢量 $\vec{e}_i-\vec{e}_j(i\neq j,i,j=1,2,\cdots\cdots,l+1)$，再加上 l 个零根矢，就构成了李代数 A_l 的根图，其阶数 $r=l(l+1)+l=l(l+2)$，这是个十分有用的李代数。

（5） 例外李代数 G_2,F_4,E_6,E_7 和 E_8

G_2 李代数的根图已讨论过，其阶数 $r=14$。

F_4 李代数是在 B_4 李代数 36 个根的基础上，再加上 16 个非零根 $\frac{1}{2}(\pm\vec{e}_1\pm\vec{e}_2\pm\vec{e}_3\pm\vec{e}_4)$，其阶数为 52，其中四个为零根。显然 F_4 含有子代数 B_4，但 B_4 并不是不变子代数。

E_6 李代数是在 A_5 的 35 个根的基础上，再加上 42 个非零根 $\pm\sqrt{2}\vec{e}_7$ 和 $\frac{1}{2}(\pm\vec{e}_1\pm\vec{e}_2\pm\vec{e}_3\pm\vec{e}_4\pm\vec{e}_5\pm\vec{e}_6)\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_7$（其第一项中必取三个正号三个负号）。其非零根个数为 72，还有 6 个零极，故 E_6 为 78 阶李代数。显然由 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5$ 和 $\vec{e}_6$ 可构成 $su(6)$ 李代数的根，而 $\pm\vec{e}_7$ 将构成 $su(2)$ 的根，故有 $E_6\supset su(6)\oplus su(2)$，但应特别指出 $E_6\neq su(6)\oplus su(2)$，因为在 E_6 中还有这两个子代数所相应的混合根 $\frac{1}{2}(\pm\vec{e}_1\pm\vec{e}_2\pm\vec{e}_3\pm\vec{e}_4\pm\vec{e}_5\pm\vec{e}_6)\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_7$。

E_7 李代数是在 A_7 基础上，再加上 70 个非零根 $\frac{1}{2}(\pm\vec{e}_1\pm\vec{e}_2\pm\vec{e}_3\pm\vec{e}_4\pm\vec{e}_5\pm\vec{e}_6\pm\vec{e}_7\pm\vec{e}_8)$，其中取 4 个正号和 4 个负号，再加上 7 个零根，故 E_7 是个 133 阶李代数。显然 E_7 含有 A_7 作为其子代数。

E_8 李代数是在 D_8 的 112 个非零根的基础上，再加入 128 个非零根 $\frac{1}{2}(\pm\vec{e}_1\pm\vec{e}_2\pm\vec{e}_3\pm\vec{e}_4\pm\vec{e}_5\pm\vec{e}_6\pm\vec{e}_7\pm\vec{e}_8)$（其中只取偶数个正号）。这样共有 240 个非零根，再加上 8 个零根，故 E_8 是 248 阶李代数，而 D_8 是 E_8 的一个子代数。

通常称 A_l,B_l,C_l 和 D_l 为典型（或经典）李代数，而 G_2,F_4,E_6，

E_7 和 E_8 为例外李代数。

§6.5 素根和邓金(Dynkin)图

前面已讨论了半单李代数的分类，并画了秩 $l\leqslant 2$ 李代数的根图，而当 $l\geqslant 3$ 时，其根图就无法直观而完全地以平面图表示，为了对这些高秩单李代数的根矢也能以平面图形象地反映根的性质，则需引入邓金图，为此需先晓得正根和素根的概念。

5—1 正根和素根

设单李代数秩为 l，按适当顺序排列其嘉当子代数的 l 个基 $H_i(i=1,2,\cdots,l)$ 如果根矢 $\vec{\alpha}$ 的第一个非零坐标分量>0，则称 $\vec{\alpha}$ 为正根；若第一个非零分量<0，则称之负根。如 B_2 的 8 个非零根坐标分别为(1,1)，(1,0)，(1,−1)，(0,1)，(0,−1)，(−1,1)，(−1,0)和(−1,−1)，其中前 4 个是正根，而后 4 个为负根。一般讲有一半的非零根为正根，另一半为负根。在李代数的表示论中，常常涉及到正根的一个新矢量 $\vec{R}$ 起着重要作用。

$$\vec{R}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\vec{\alpha} \tag{6.5.1}$$

由(6.4.4)式给出的单位矢与根矢的关系，不难求得各种典型李代数的相应新矢量 $\vec{R}$ 的第 i 个分量为

$$\begin{aligned}
A_l:&\quad R_i=\frac{l}{2}+1-i, \qquad 1\leqslant i\leqslant l+1\\
D_l:&\quad R_i=\frac{2l+0}{2}-i\\
B_l:&\quad R_i=\frac{2l+1}{2}-i\\
C_l:&\quad R_i=\frac{2l+2}{2}-i, \qquad 1\leqslant i\leqslant l
\end{aligned} \tag{6.5.2}$$

定理 6.11：单李代数的每个非零根 $\vec{\gamma}$ 皆可表为其它两个非零根 $\vec{\alpha}$ 和 $\vec{\beta}$ 之和。

证明：如果根 $\vec{\gamma}$ 不能写为 $\vec{\alpha}+\vec{\beta}(\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq 0)$，则 $\vec{\gamma}$ 和 $\vec{\alpha}$ 相应的本征矢 E_γ 和 E_α 必对易，即

$$[E_\gamma, E_\alpha]=0, (\alpha\neq 0, -\gamma) \tag{6.5.3}$$

这因为若上式不成立，根据李代数结果有

$$[E_\gamma, E_\alpha]=N_{\gamma,\alpha}E_{\gamma+\alpha}\neq 0$$

故有 $\vec{\gamma}+\vec{\alpha}=\vec{\beta}\Rightarrow\vec{\gamma}=(-\vec{\alpha})+\vec{\beta}$，即 $\vec{\gamma}$ 必为两非零根之和。可见 $\vec{\gamma}$ 不能表示两非零根之和的条件是等价于 E_γ、$E_{-\gamma}$ 与所有非零根 $\vec{\alpha}$ 相应的 E_α 皆对易，又因为

$$[\gamma_i H_i, E_\alpha]=[[E_\gamma, E_{-\gamma}], E_\alpha]=[E_\gamma,[E_{-\gamma}, E_\alpha]]+[E_{-\gamma},[E_\alpha, E_\gamma]]=0$$

可见由 E_γ、$E_{-\gamma}$ 和 $\gamma_i H_i=[E_\gamma, E_{-\gamma}]$ 构成的子代数与由 E_α，$E_{-\alpha}$ 及 $\alpha_i H_i=[E_\alpha, E_{-\alpha}]$ $(\alpha\neq\pm\gamma)$ 构成的子代数是相互对易的，故此李代数必为半单李代数，这与其为单李代数前题相矛盾，此定理得证。

为了系统研究根的性质，下面再做根的次序排列。由(6.4.4)式给出的欧氏基 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_l$ 中，李代数的每个根矢 $\vec{\alpha}$ 皆可表为

$$\vec{\alpha}=\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\vec{e}_i$$

对于正根 $\vec{\alpha}$，它必满足

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{k-1}=0 \quad \alpha_k>0 \tag{6.5.4}$$

由此可对非零根做大小编序，由(6.5.4)式可判断两个非零根 $\vec{\alpha}$ 和 $\vec{\beta}$ 之差，若 $\vec{\alpha}-\vec{\beta}>0$，则称根 $\vec{\alpha}$ 大于 $\vec{\beta}$，在此基础上可将 l 秩李代数的根系 $\sum_l$ 分为三个不同部分

$$\sum_l=\sum_{\alpha>0}{}_l^{+}+\sum_{\alpha=0}{}_l^{0}+\sum_{\alpha<0}{}_l^{-} \tag{6.5.5}$$

如果一个正根不能分解为其它两个正根之和，则称它为素根

(或单根)。例如 B_2 的两个正根(1,0)和(1,1)可写为

(1,0)=(1,−1)+(0,1);(1,1)=(1,0)+(0,1),因此(1,0)和(1,1)不是素根,而正根(0,1)和(1,−1)不存在这样的组合,故 B_2 的二个素根是 $\vec{\alpha}_1=(0,1)$ 和 $\vec{\alpha}_2=(1,-1)$。

通常以 Π 来标记李代数的素根集,它们是线性独立的,每个正根都可表示为

$$\sum_{\alpha\in\Pi}k_\alpha\vec{\alpha}\ (k_\alpha\ \text{为非负整数}) \tag{6.5.6}$$

对于 l 秩单李代数,恰好有 l 个素根,它们形成 l 维根空间的一组线性独立基矢,任何非零根皆可表为这 l 个素根的线性组合。

定理 6.12:若 $\vec{\alpha}$ 和 $\vec{\beta}$ 是单李代数的两个素根,则有

1° $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ 不是根。

2° $$\frac{2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})}{(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha})}=-m\ (m\ \text{为零或正整数}) \tag{6.5.7}$$

3° $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 之夹角 $\theta_{\alpha\beta}$ 只可取 90°,120°,135°或 150°。设 $\vec{\beta}$ 为长根,则有

$$\frac{|\vec{\beta}|^2}{|\vec{\alpha}|^2}=\begin{cases}\text{不定}, & \theta_{\alpha\beta}=90^\circ\\ 1, & \theta_{\alpha\beta}=120^\circ\\ 2, & \theta_{\alpha\beta}=135^\circ\\ 3, & \theta_{\alpha\beta}=150^\circ\end{cases} \tag{6.5.8}$$

证明:1°假设 $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\gamma}$ 是非零根,则有

$$\vec{\gamma}\in\sum\nolimits_l^+\ \text{或}\ \sum\nolimits_l^-$$

这分别对应以下两种情况:

$$\begin{aligned}&\vec{\alpha}=\vec{\gamma}+\vec{\beta},\ \text{当}\ \vec{\gamma}\in\sum\nolimits_l^+\\ &\vec{\beta}=\vec{\alpha}+(-\vec{\gamma}),\ \text{当}\ \gamma\in\sum\nolimits_l^-\end{aligned} \tag{6.5.9}$$

以上两种情况都与 $\vec{\alpha}$ 和 $\vec{\beta}$ 为素根相矛盾,故 $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ 不是根。

2° 假定$(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})>0$，则$\dfrac{2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})}{(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha})}$必为正整数，而由根矢性质知$\vec{\gamma}=\vec{\beta}-\vec{\alpha}$也是根，但本定理$1^\circ$已断定这与$\vec{\alpha}$和$\vec{\beta}$为素根相矛盾，故只可能是$(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\leqslant 0$，考虑含$\vec{\beta}$的$\vec{\alpha}$根链为

$\vec{\beta}-k\vec{\alpha},\cdots,\vec{\beta},\vec{\beta}+\vec{\alpha},\cdots\vec{\beta}+m\vec{\alpha}$（$k,m$ 皆为正整数或零）。该定理1°推知$k=0$，再代入(6.3.27)式推得，$2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})/(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha})=k-m=-m$，故性质$2^\circ$得证。

3° 利用(6.5.7)式，并仿照(6.4.2)式的讨论，立即可推得(6.5.8)式结果。

以A_l李代数为例，由(6.4.4)式可得到它的正根和素根。

正根：$\vec{e}_i-\vec{e}_j,\qquad i<j$

由于两个正根$\vec{e}_i-\vec{e}_j(1\leqslant i<j\leqslant l)$和$\vec{e}_j-\vec{e}_k(2\leqslant j<k\leqslant l+1)$之和为$\vec{e}_i-\vec{e}_k(1\leqslant i<k-1\leqslant l)$，故正根中不能写为两个正根之和形式的只有$\vec{e}_i-\vec{e}_k(1\leqslant i\leqslant l,k=i+1)$这$l$个素根，故有

$$\Pi(A_l):\vec{\alpha}_i=\vec{e}_i-\vec{e}_k(1\leqslant i\leqslant l,k=i+1),$$

类似还有其它l秩典型李代数的素根系为

$$\Pi(B_l):\vec{\alpha}_i=\vec{e}_i-\vec{e}_{i+1}(1\leqslant i\leqslant l-1),$$
$$\vec{\alpha}_1=\vec{e}_l;$$
$$\Pi(C_l):\vec{\alpha}_i=\vec{e}_i-\vec{e}_{i+1}(1\leqslant i\leqslant l-1)$$
$$\vec{\alpha}_l=2\vec{e}_l;$$
$$\Pi(D_l):\vec{\alpha}_i=\vec{e}_i-\vec{e}_{i+1}(1\leqslant i\leqslant l-1)$$
$$\vec{\alpha}_l=\vec{e}_{l-1}+\vec{e}_l.$$

当然，这些素根都是在(6.4.4)式基础上给出的，一般说来，基矢选择不同，素根的具体形式也不相同，即使在同一组基下，素根的取法也可以不同。按(6.4.4)式的基矢，表6.1给出了所有半单李代数常用的根系和素根系。

表 6.1 单李代数的根系和素根系

李代数	秩	非零根	非零根数	素根	阶	根归一化常数
A_l	l	$\vec{e}_i-\vec{e}_j,1\leqslant i\neq j\leqslant l+1$	$l(l+1)$	$\vec{e}_i-\vec{e}_{i+1}(i=1,2,\cdots,l)$	$l(l+2)$	$[2(l+1)]^{-1/2}$
B_l	l	$\pm\vec{e}_i\pm\vec{e}_j,\pm\vec{e}_i,1\leqslant i\neq j\leqslant l$	$2l^2$	$\vec{e}_i-\vec{e}_{i+1},\vec{e}_l(i=1,\cdots,l-1)$	$l(2l+1)$	$[2(2l-1)]^{-1/2}$
C_l	l	$\pm\vec{e}_i\pm\vec{e}_j,\pm2\vec{e}_i,1\leqslant i\neq j\leqslant l$	$2l^2$	$\vec{e}_i-\vec{e}_{i+1},2\vec{e}_l(i=1,\cdots,l-1)$	$l(2l+1)$	$[2(2l+2)]^{-1/2}$
D_l	l	$\pm\vec{e}_i\pm\vec{e}_j,1\leqslant i\neq j\leqslant l$	$2l(l-1)$	$\vec{e}_i-\vec{e}_{i+1},\vec{e}_{l-1}+\vec{e}_l,(i=1,\cdots,l-1)$	$l(2l-1)$	$[2(2l-2)]^{-1/2}$
G_2	2	$\vec{e}_i-\vec{e}_j,\pm(\vec{e}_i+\vec{e}_j)\mp2\vec{e}_k,$ $(1\leqslant i\neq j\neq k\leqslant 3)$	12	$-\vec{e}_1+2\vec{e}_2-\vec{e}_3,\vec{e}_1-\vec{e}_2$	14	$[24]^{-1/2}$
F_4	4	$\pm\vec{e}_i\pm\vec{e}_j,\pm\vec{e}_i(1\leqslant i\neq j\leqslant 4),$ $\frac{1}{2}(\pm\vec{e}_1\pm\vec{e}_2\pm\vec{e}_3\pm\vec{e}_4)$	48	$\vec{e}_1-\vec{e}_2,\vec{e}_2-\vec{e}_3,\vec{e}_3,\frac{1}{2}(\vec{e}_4-\vec{e}_1-\vec{e}_2-$ $\vec{e}_3)$	52	$\frac{1}{6}$
E_6	6	$\vec{e}_i-\vec{e}_j(1\leqslant i\neq j\leqslant 6),\quad \pm\sqrt{2}\,\vec{e}_7,$ $\frac{1}{2}(\pm\vec{e}_1\pm\vec{e}_2\pm\cdots\pm\vec{e}_6)\pm\frac{\vec{e}_7}{\sqrt{2}}$ 取 3 个正号 3 个负号	72	$\vec{e}_i-\vec{e}_{i+1},(i=1,\cdots,5)\frac{1}{2}(-\vec{e}_1-\vec{e}_2-$ $\vec{e}_3+\vec{e}_4+\vec{e}_5+\vec{e}_6+\sqrt{2}\,\vec{e}_7)$	78	$[24]^{-1/2}$
E_7	7	$\vec{e}_i-\vec{e}_j,(1\leqslant i\neq j\leqslant 8)$ $\frac{1}{2}(\pm\vec{e}_1\pm\vec{e}_2\pm,\cdots,\pm\vec{e}_8)$ 取 4 个正号 4 个负号	126	$\vec{e}_i-\vec{e}_{i+1}(i=1,2,\cdots,6)$ $\frac{1}{2}(-\vec{e}_1-\vec{e}_2-\vec{e}_3+\vec{e}_4+\vec{e}_5+\vec{e}_6+\vec{e}_7$ $-\vec{e}_8)$	133	$\frac{1}{6}$
E_8	8	$\pm\vec{e}_i\pm\vec{e}_j,(1\leqslant i\neq j\leqslant 8)$ $\frac{1}{2}(\pm\vec{e}_1\pm\vec{e}_2\pm,\cdots,\pm\vec{e}_8)$ 取偶数个正号	240	$\vec{e}_i-\vec{e}_{i+1},\vec{e}_7+\vec{e}_8(i=1,\cdots,6)\frac{1}{2}(-\vec{e}_1$ $-\vec{e}_2-\vec{e}_3+\vec{e}_4+\vec{e}_5+\vec{e}_6+\vec{e}_7-\vec{e}_8)$	248	$[60]^{-1/2}$

表 6.1 中的根归一化常数是使其基林型 $g_{ij}=\sum_{a}\alpha_i\alpha_j=\delta_{ij}$时，$\alpha_i$ 的归一化因子。当 $g_{ij}=\delta_{ij}$时，(g_{ij})的逆$(g_{ij})^{-1}=g^{ij}=\delta_{ij}$，称这样的基为嘉当-韦耳标准基，而相应的卡塞米尔算子为

$$C_2=\sum_{i}H_i^2+\sum_{a}E_aE_{-a} \tag{6.5.10}$$

5—2 邓金图

单李群的性质决定于相应的李代数，而单李代数的性质表现为根的分布和相对长度之比，同时这些根的性质又取决于其素根的分布和长度之比。只要晓得素根的个数，夹角和长度比，立即可求出所有根。因为任何单李代数只有长短两类根，若以白圈"○"和黑圈"●"分别代表长根和短根，两素根之间夹角以一条、二条和三条联结直线分别代表 120°，135°和 150°，而夹角为 90°时，两素根无直线连接，以这样的图形表现李代数的素根系称之邓金图。

若令 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_l$ 为单李代数的 l 个素根，则有

$$\frac{(\vec{\alpha}_i\cdot\vec{\alpha}_j)}{|\vec{\alpha}_i||\vec{\alpha}_j|}=0,-\sqrt{\frac{1}{4}},-\sqrt{\frac{2}{4}},-\sqrt{\frac{3}{4}} \tag{6,5,11}$$

取每个素根的单位矢量为 $\vec{u}_i\equiv\frac{\vec{\alpha}_i}{|\vec{\alpha}_i|}$，则上式化为

$$(\vec{u}_i\cdot\vec{u}_j)=-\sqrt{\frac{n}{4}},n=0,1,2,3 \tag{6,5,12}$$

如果按以下步骤画出李代数的素根系，同样可得到与上述完全等同的邓金图：

1° 以实心黑圈"●"代表素根 $\vec{\alpha}_i$ 相应的单位矢 $\vec{u}_i$；

2° 按式(6.5.12)给出的 n 条直线联结 $\vec{u}_i$ 和 $\vec{u}_j$ 相应的黑圈；

3° 在第 i 个黑圈上方标出$(\vec{\alpha}_i\cdot\vec{\alpha}_i)$的相对值。

图 6.7 给出了 $l\leqslant2$ 的半单李代数相应的邓金图。

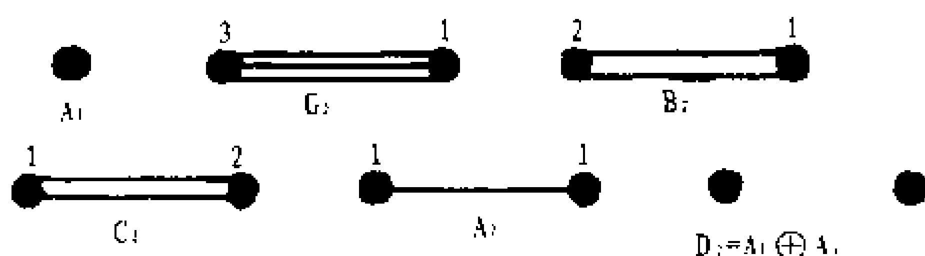


图 6.7 $l\leqslant 2$ 的李代数邓金图

显然，依据李代数根的性质，不难推断单李代数的邓金图不会断开；每个素根黑圈的连线不会超过三条，且邓金图不会形成封闭环；其长短素根在邓金图上不可能交替出现。因此，所有 $l\geqslant 3$ 的单李代数邓金图只有如图 6.8 所示的几种形状。

设 $\Pi=\{\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_l\}$ 是单李代数 g 的素根系，定义 l 阶方矩阵 A，其矩阵元为

$$A_{ij}=2(\vec{\alpha}_i\cdot\vec{\alpha}_j)/(\vec{\alpha}_i\cdot\vec{\alpha}_i) \qquad (6.5.13)$$

称 A 为 g 的嘉当矩阵。显然 A 的对角元素皆为 2，而由定理 6.12 可知，其非对角元可取 0，-1，-2 或 -3，根据邓金图不难确定嘉当矩阵元：若素根 α_i 和 α_j 在邓金图中不相连，则 $A_{ij}=A_{ji}=0$；若 α_i 与 α_j 单线相连，则 $A_{ij}=A_{ji}=-1$；若 α_i 与 α_j 双线连接，且 α_j 为长根，则 $A_{ij}=-2$，$A_{ji}=-1$；若 α_i 与 α_j 三线相连，且 α_j 为长根，则 $A_{ij}=-3$，$A_{ji}=-1$。由此不难将各种单李代数的嘉当矩阵求出。以下分别给出李代数 A_2 和 G_2 的嘉当矩阵。

$$A_2:\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix},G_2:\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix} \qquad (6.5.13')$$

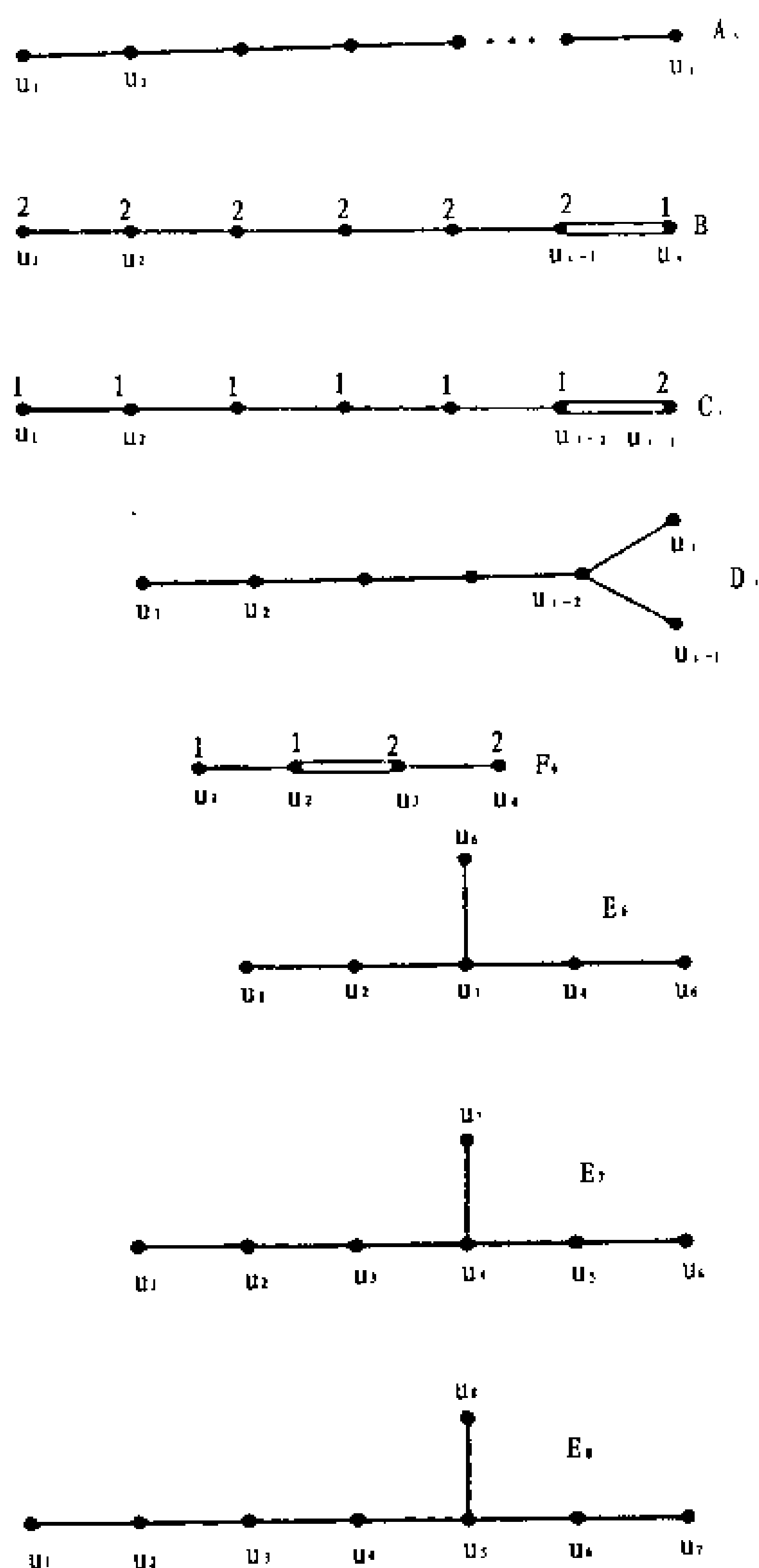


图 6.8 $l\geqslant 3$ 的单李代数的邓金图

5—3 李代数的根系

设 $\Pi=\{\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_l\}$ 是单李代数 g 的素根系，则 g 的所有根可从 Π 和嘉当矩阵求得，由于 g 的任何根皆可表为

$$\pm\sum_{i=1}^{l}k_i\vec{\alpha}_i \quad ,\ (k_i \text{ 为非负整数}) \tag{6.5.14}$$

若 $\vec{\alpha}$是 g 的一个正根，必有

$$\vec{\alpha}=\sum_{i=1}^{l}k_i\vec{\alpha}_i$$

如果

$$\sum_{i=1}^{l}k_i=m \tag{6.5.15}$$

则称 $\vec{\alpha}$为 m 级正根。显然，素根是一级正根。

如果已知 m 级以下的所有正根，那末 $m+1$ 级正根必具有如下形式

$$\vec{\beta}=\vec{\alpha}+\vec{\alpha}_j \quad (\alpha_j\in\Pi)$$

其中 $\vec{\alpha}$是满足(6.5.15)式的 m 级正根。既然已知所有 m 级以下的正根，因而也就晓得其线性形式为 $\vec{\alpha}-\vec{\alpha}_j,\vec{\alpha}-2\vec{\alpha}_j,\cdots$中，哪些是根，哪些不是根，故在包含 $\vec{\alpha}$的 $\vec{\alpha}_j\in\Pi$ 根链 $\vec{\alpha}-m_j\vec{\alpha}_j,\vec{\alpha}-(m_j-1)\vec{\alpha}_j,\cdots,\vec{\alpha},\cdots,\vec{\alpha}+n_j\vec{\alpha}_j$ 中，m_j 是已知的，由(6.3.27b)，(6.5.15)和(6.5.13)式不难求得

$$n_j=m_j-\frac{2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}_j)}{(\vec{\alpha}_j\cdot\vec{\alpha}_j)}=m_j-\sum_i A_{ji}k_i \tag{6.5.16}$$

即 n_j 可由嘉当矩阵决定。若 $n_j\geqslant 1$，则 $\vec{\alpha}+\vec{\alpha}_j$ 是根；若 $n_j<1$，则 $\vec{\alpha}+\vec{\alpha}_j$ 不是根。由此可逐级求出其所有正根，从而也就给出 g 的全体根系。

例 1　求李代数 G_2 的所有根。

因 $\Pi(G_2)=\{\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2\}$，其邓金图和嘉当矩阵分别如图 6.7 和式(6.5.13′)所示，由定理 6.12 知 $\vec{\alpha}_2-\vec{\alpha}_1$ 不是根，故含 $\vec{\alpha}_2$ 的 $\vec{\alpha}_1$ 根键中 $m_1=0$，由(6.5.16)式得 $n_1=-\sum_{i=1}^{2}A_{1i}k_i=-(2,-1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=1$，故 $\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$ 是根；同理，包含 $\vec{\alpha}_1$ 的 $\vec{\alpha}_2$ 根键中 $m_2=0$，则 $n_2=-\sum_{i=1}^{2}A_{2i}k_i=-(-3,2)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=3>1$，也同样得到 G_2 的 2 级正根 $\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$；而含 $(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2)$ 的 $\vec{\alpha}_1$ 根键为 $\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2,\cdots$，故有 $m_1=1$，再由(6.5.16)式得 $n_1=m_1-\sum_{i=1}^{2}A_{1i}k_i=1-(2,-1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=0<1$，故 $2\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$ 不是根。包含 $(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2)$ 的 $\vec{\alpha}_2$ 根键为 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2,\cdots$，故 $m_2=1$，同样得 $n_2=m_2-\sum_{i=1}^{2}A_{2i}k_i=1-(-3,2)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=2>1$，故知 $\vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2$ 是 G_2 的三级根。再继续考虑含 $\vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2$ 的 $\vec{\alpha}_2$ 根键是 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2\cdots$，故有 $m_2=2$，而 $n_2=2-\sum_{i=1}^{2}A_{2i}k_i=1$，可知 $\vec{\alpha}_1+3\vec{\alpha}_2$ 是 G_2 的 4 级正根；而含 $(\vec{\alpha}_1+3\vec{\alpha}_2)$ 的 $\vec{\alpha}_1$ 根键是 $\vec{\alpha}_1+3\vec{\alpha}_2$，故 $m_1=0,n_1=-\sum_{i=1}^{2}A_{1i}k_i=-(2,-1)\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=1$，可知 $2\vec{\alpha}_1+3\vec{\alpha}_2$ 是 G 的 5 级正根；而包含 $\vec{\alpha}_1+3\vec{\alpha}_2$ 的 $\vec{\alpha}_2$ 根键为 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_1+3\vec{\alpha}_2\cdots$，故有 $m_2=3,n_2=3-\sum_{i=1}^{2}A_{2i}k_i=0<1$，可知 $\vec{\alpha}_1+4\vec{\alpha}_2$ 不是根。

含 $2\vec{\alpha}_1+3\vec{\alpha}_2$ 的 $\vec{\alpha}_1$ 根键是 $\vec{\alpha}_1+3\vec{\alpha}_2,2\vec{\alpha}_1+3\vec{\alpha}_2,\cdots$故 $m_1=1,n_1=1-\sum_{i=1}^{2}A_{1i}k_i=0<1$；而含 $(2\vec{\alpha}_1+3\vec{\alpha}_2)$ 的 $\vec{\alpha}_2$ 根键为 $2\vec{\alpha}_1+3\vec{\alpha}_2\cdots$，故

$m_2=0, n_2=-\sum_{i=1}^{2} A_{2i}k_i=0<1$，可知 G_2 的 5 级以上正根不存在。因此 G_2 的所有非零根是 $\pm\vec{\alpha}_1$，$\pm\vec{\alpha}_2$，$\pm(\vec{\alpha}_1\pm\vec{\alpha}_2)$，$\pm(\vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2)$，$\pm(\vec{\alpha}_1+3\vec{\alpha}_2)$ 和 $\pm(2\vec{\alpha}_1+3\vec{\alpha}_2)$，其中 5 级正根 $2\vec{\alpha}_1+3\vec{\alpha}_2$ 称之 G_2 的最高根，常在 G_2 的邓金图上分别标出最高根包含素根 $\vec{\alpha}_1$ 和 $\vec{\alpha}_2$ 的次数为 2 和 3。

例 2　求李代数 A_l 的根系。

由于 A_l 的素根系 $\Pi(A_l)=\{\vec{\alpha}_i=\vec{e}_i-\vec{e}_{i+1},\quad i=1,2,\cdots,l\}$，其 1 级根：$\vec{\alpha}_i, i=1,2,\cdots,l$；

2 级根：$\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2=\vec{e}_1-\vec{e}_3, \vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3=\vec{e}_2-\vec{e}_4,\cdots$；

$\vec{\alpha}_{l-1}+\vec{\alpha}_l=\vec{e}_{l-1}-\vec{e}_{l+1}$；

3 级根：$\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3=\vec{e}_1-\vec{e}_4,\cdots,\vec{\alpha}_{l-2}+\vec{\alpha}_{l-1}+\vec{\alpha}_l$

$=\vec{e}_{l-2}-\vec{e}_{l+1}$；

$\cdots$；

l 级根：$\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\cdots\vec{\alpha}_{l-1}+\vec{\alpha}_l=\vec{e}_1-\vec{e}_{l+1}$。

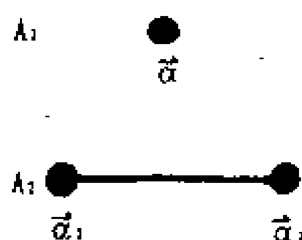


图 6.9

l 级根是 A_l 的最高根，它包含每个素根各一次。类似地可求得各种单李代数的根系。利用邓金图不仅可求得各种单李代数的根系，而且还可推得它们的正则结构形式。

例 3　求单李代数 A_1 和 A_2 的正则形式。

已知单李代数 A_1 和 A_2 的邓金图如图 6.9 所示。A_1 的秩为 1，它只有一个素根 $\vec{\alpha}$，故其根图如图 6.10(a)所示。若以 E_α 和 $E_{-\alpha}$ 分别代表 H 对于根 $\vec{\alpha}$ 和 $-\vec{\alpha}$ 的本征矢，若取根矢归一化，则有

$$[H,H]=0$$
$$[H,E_{\pm\alpha}]=\pm E_{\pm\alpha} \qquad (6.5.17)$$
$$[E_\alpha,E_{-\alpha}]=H$$

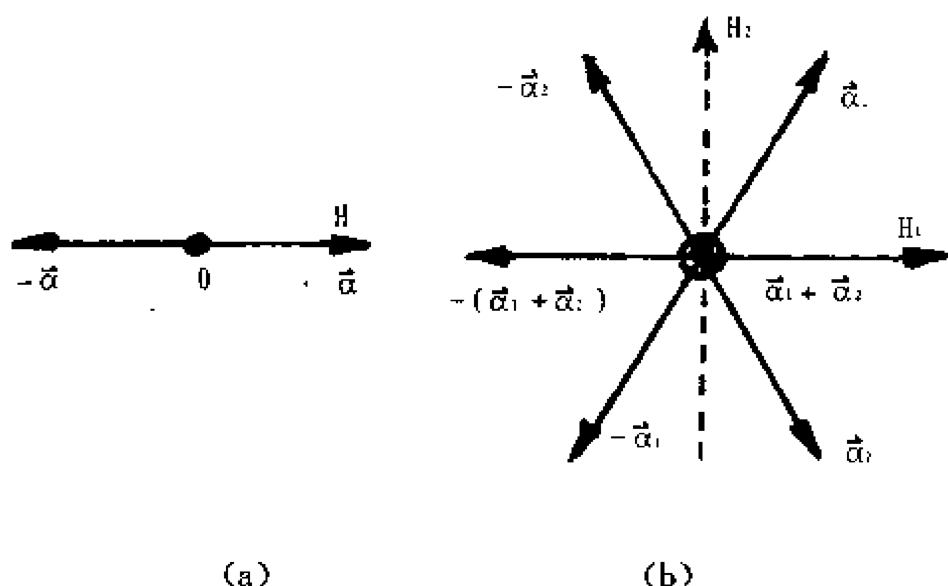


图 6.10 A_1 和 A_2 的根图

由(6.3.15)和(6.3.17)式不难求得 A_1 的嘉当—基林度规张量为

$$g=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \tag{6.5.18}$$

A_1 的矢塞米尔算子为

$$C_2=H^2+E_\alpha E_{-\alpha}+E_{-\alpha}E_\alpha \tag{6.5.19}$$

由于 A_1 为复李代数，它与三维空间转动李代数 $o(3)$同构，已知 $o(3)$的生成元为 J_x,J_y 和 J_z，两者相应的同构映射使之

$$H \rightleftharpoons J_z,$$

$$E_{\pm\alpha}\rightleftharpoons J_\pm=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}(J_x+iJ_y) \tag{6.5.20}$$

但需指出 $o(3)$是实李代数，其生成元满足厄米条件 $J_x^+=J_x,J_y^+=J_y$和 $J_z^+=J_z$，而复李代数 A_1 一般并不具有这种性质。

A_2 的秩为 2，其邓金图如图 6.9。若取每个根长度为$\frac{1}{\sqrt{3}}$，则其嘉当—基林度规张量为

$$g_{ij}=\sum_\alpha \alpha_i\alpha_j=\delta_{ij} \tag{6.5.21}$$

其根图如图 6.10(b)所示，它的最高根为 $\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,0)$，另外两个正根即是素根本身：$\vec{\alpha}_1=\frac{1}{2\sqrt{3}}(1,\sqrt{3})$和 $\vec{\alpha}_2=\frac{1}{2\sqrt{3}}(1,-\sqrt{3})$。

由(6.3.15)式可得到 A_2 的正则结构形式为

$$
\begin{aligned}
&[H_1,H_2]=0\\
&[H_1,E_{\pm\alpha_i}=\frac{1}{2\sqrt{3}}E_{\pm\alpha_i},(i=1,2)\\
&[H_1,E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}]=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}\\
&[H_2,E_{\pm\alpha_1}]=\pm\frac{1}{2}E_{\pm\alpha_1}\\
&[H_2,E_{\pm\alpha_2}]=\mp\frac{1}{2}E_{\pm\alpha_2}\\
&[H_2,E_{\mp(\alpha_1+\alpha_2)}]=0\\
&[E_{\alpha_1},E_{-\alpha_1}]=\frac{1}{2\sqrt{3}}H_1+\frac{1}{2}H_2\\
&[E_{\alpha_2},E_{-\alpha_2}]=\frac{1}{2\sqrt{3}}H_1-\frac{1}{2}H_2\\
&[E_{\alpha_1+\alpha_2},E_{(-\alpha_1+\alpha_2)}]=\frac{1}{\sqrt{3}}H_1
\end{aligned}
\tag{6.5.22a}
$$

因含 $\vec{\alpha}_1$ 的 $\vec{\alpha}_2$ 根链中只有 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$，由(6.3.30)式可求得 $N_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{6}}$，故有

$$[E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}] = \frac{1}{\sqrt{6}} E_{\alpha_1+\alpha_2}$$

$$[E_{\alpha_1}, E_{\alpha_1+\alpha_2}] = 0$$

$$[E_{\alpha_1}, E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}] = -\frac{1}{\sqrt{6}} E_{-\alpha_2} \tag{6.5.22b}$$

$$[E_{\alpha_2}, E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}] = \frac{1}{\sqrt{6}} E_{-\alpha_1}$$

由于根是归一化的，故 A_2 的嘉当一基林度规张量为

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = g^{-1} \tag{6.5.23}$$

若 $\vec{\alpha}_3 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2$，则 A_2 的卡塞米尔算子为

$$C_2 = H_1^2 + H_2^2 + \sum_{i=1}^{3} E_{\alpha_i} E_{-\alpha_i} + \sum_{i=1}^{3} E_{-\alpha_i} E_{\alpha_i} \tag{6.5.24}$$

对于其它单李代数的根系，也可进行类似讨论。我们已经知道四个系列典型复单李代数 A_l, B_l, C_l, D_l 和五个例外李代数，如果限制李代数仅在实数域上定义，就会得到实李代数 g。设 g 的一组基为 $X_1, X_2, \cdots, X_r$，则对于任意 $X, Y \in g$，都有

$$X = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j X_j, \quad Y = \sum_{j=1}^{r} \beta_j X_j$$

而由重新定义的 $X+iY$ 生成的复李代数 g^c，相应有

$$X + iY = \sum_{j=1}^{r} (\alpha_j + i\beta_j) X_j$$

可见 $X_1, X_2, \cdots, X_r$ 也是 g^c 的一组基。所以实李代数 g 与其这样

扩充的复李代数 g^c 具有相同的代数结构常数，而且皆为实数。如果将 g^c 的元素 $X+io(X\in g)$ 视为与 g 的元素 X 等同，并以 X 代替 $X+io$，这样实李代数 g 是其复扩充 g^c 的一个子代数，称 g 是复李代数 g^c 的一个实形，在同构的意义下，不难看出，由实李代数 g 出发可定义其唯一的复扩充李代数 g^c，但对复李代数而言，却不一定总存在其实形，即使存在实形，也可能同时有多个实形，只要复李代数有实形，那末总可以选一组两者共同基矢 $X_1,X_2,\cdots,X_r$，自然这两种李代数具有相同的结构常数，且为实数。由此可推知，复李代数具有实形的充要条件就是它可选一组基$\{X_i\}$，使之相应的结构常数皆为实数，而由$\{X_i\}$为基的实李代数就是复李代数的一个实形，且两者的可解性和半单性也完全一样。已知任何半单紧致李代数的基林型是负定的，而且在同构的意义上还可证明复半单李代数的紧致实形是唯一的。由于复半单李代数的结构常数总可以选为实数，故其紧致实形总是存在的，且是唯一的。例如 A_l 的紧致实形是 $su(l+1)$，B_l 的紧致实形是 $o(2l+1,R)$，而 C_l 和 D_l 的紧致实形分别是 $sp(2l)$和 $o(2l,R)$等。

习　题　六

6—1 试证明虽然 B_2 和 C_2 李代数的根空间通过转动可相互转换，但李代数 B_3 和 C_3 的根空间却不具有这种转换性质。

6—2 证明秩为 l 的典型李代数的维数 r 满足以下关系：

$$\frac{r}{l^2}=\begin{cases}1+\dfrac{2}{l} & A_l\\[2ex] 2-\dfrac{1}{l} & D_l\\[2ex] 2+\dfrac{1}{l} & B_l,C_l\end{cases}$$

6—3 证明李代数 A_3 和 D_3 同构，并分别求出它俩的非零根。

6—4 计算四种典型李代数的正根之和构成的新矢量

$$\vec{R}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\vec{\alpha}。$$

6—5 仿照 $su(3)$ 李代数的结构，试写出李代数 B_2 和 C_2 的正则形式结构；并给出它们的嘉当—基林度规张量和卡塞米尔算子。

6—6 设 b_i^+ 和 $b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 分别是玻色子的产生和湮灭算符，它们满足对易关系

$$[b_i^+,b_j^+]=[b_i,b_j]=0,\quad [b_i,b_j^+]=\delta_{ij}$$

证明：1° 算符 $b_i^+b_i+\frac{1}{2}$，　$b_i^+b_j(i\neq j)$，　$b_i^+b_j^+$ 和 $b_ib_j(i,j=1,2,\cdots,n)$ 构成李代数 $sp(2n,R)$，其相应李群 $SP(2n,R)$ 是 n 种玻色子的巨希耳伯特空间的动力学对称群。

2° 算符 $b_i^+b_j(i,j=1,2,\cdots,n)$ 构成李代数 $u(n)$，其相应李群 $U(n)$ 是 n 种玻色子在粒子数守恒时的动力学对称群。

6—7 设 a_i^+ 和 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 分别是费米子的产生和湮灭算符，它们满足反对易关系为

$$\{a_i^+,a_j^+\}=\{a_i,a_j\}=0,\{a_i,a_j^+\}=\delta_{ij}$$

证明：1° 算符 $a_i^+a_i-\frac{1}{2}$，$a_i^+a_j$，$a_i^+a_j^+$ 和 $a_ia_j(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$ 将构成李代数 $o(2n)$，其相应李群 $O(2n)$ 是 n 种费米子巨希耳伯特空间的动力学对称群。

2° 算符 $a_i^+a_j(i,j=1,2,\cdots,n)$ 构成李代数 $u(n)$，其相应李群 $U(n)$ 则是 n 种费米子粒子数守恒时的动力学对称群。

第七章　李代数的表示及其应用

在第四章中曾利用杨氏对称化算子对经典群的各种对称型张量表示做过详细讨论，本章将以根权理论为基础探讨李代数的线性表示，灵活运用这两种方法将对研究李代数和李群的表示带来很大方便。最后通过若干实例来了解李群表示论对研究许多物理问题所起的重要作用。

§7.1　李群和李代数的表示

设 g 是一个李代数，V 是复数域 C 上的一个 n 维矢量空间，而 $gl(n,c)$ 是作用在 V 上的一般线性李群 $GL(n,c)$ 相应的李代数，如果存在一个从 g 到 $gl(n,c)$ 的同态映射 A，对于任意 $x\in g$，有

$$A: x\to A(x)\in gl(n,c)$$

则称 A 是李代数 g 的一个表示，V 为 g 的表示 A 相应的表示空间，而称 n 为表示 A 的维数。自然，同态映射 A 应保持李代数 g 的运算不变。

$$\begin{aligned}&A(ax+by)=aA(x)+bA(y)\\&A([x,\ y])=[A(x),\ A(y)]\\&\quad(x,\ y\in g;\ a,\ b\in C)\end{aligned}\tag{7.1.1}$$

与群表示相似，李代数也有忠实表示，等价表示，不可约表示，可约和完全可约表示等。

已知李代数 g 唯一地决定一个单连通李群 SG，通过指数映射，g 与 SG 的表示是一一对应的。对于有限群，我们只需讨论其

不可约的幺正表示，但对李群而言，情况更为复杂，因为李群的表示维数可以有限也可无限；可是分离的，也可是连续的；可是幺正表示，也可是非幺正表示。我们将不加证明地引入李群表示的三个定理：

定理 7.1：可解李群的每个有限维不可约表示是 1 维的。

定理 7.2：紧致连通单李群的不可约幺正表示都是有限维的。

定理 7.3：非紧致连通单李群的不可约幺正表示，除恒等表示外，都是无限维的。

由以上定理可推断，紧致连通单李群的无限维表示不是幺正表示，而非紧致连通单李群除去 1 维恒等表示外，其有限维表示都不是幺正表示。

正如每个有限群都有其恒等表示和正则表示一样，每个李群或李代数也有其恒等表示和正则表示。有限群的正则表示取决于群的结构（乘法表）；李代数的正则表示决定于其代数结构，而李代数结构又完全取决于它的结构常数 $C_{\mu\gamma}^{\lambda}$。当李代数的基按(6.1.6)式作线性变换时，其相应结构常数将依(6.1.7)式变换，可见结构常数具有三阶混合张量的变换性质，而李代数的分类正是涉及对这个特殊张量的仔细研究。为此可依结构常数来定义一组矩阵，即

$$C_{\mu\gamma}^{\lambda}=(M_{\mu})_{\gamma}^{\lambda}=R(X_{\mu})_{\gamma}^{\lambda} \tag{7.1.2}$$

其中 X_{μ} 为 r 维李代数 $g=\{(X_{\mu})\}$ 的第 μ 个基矢，指标 λ 和 γ 分别为 r 阶矩阵的行和列指标，显然

$$\begin{aligned}
[R(X_{\mu}),R(X_{\nu})]_{\rho}^{\lambda}&=[R(X_{\mu})R(X_{\nu})]_{\rho}^{\lambda}-[R(X_{\nu})R(X_{\mu})]_{\rho}^{\lambda}\\
&=R(X_{\mu})_{\mu'}^{\lambda}R(X_{\nu})_{\rho}^{\mu'}-R(X_{\nu})_{\mu'}^{\lambda}R(X_{\mu})_{\rho}^{\mu'}=C_{\mu\mu'}^{\lambda}C_{\nu\rho}^{\mu'}-C_{\nu\mu'}^{\lambda}C_{\mu\rho}^{\mu'}\\
&=C_{\mu\nu}^{\mu'}C_{\mu'\rho}^{\lambda}=C_{\mu\nu}^{\mu'}[R(X_{\mu'})]_{\rho}^{\lambda}
\end{aligned} \tag{7.1.3}$$

按照表示的定义，显然新定义的矩阵组 R（X_{μ}）是李代数的一个表示，它类似于有限群的正则表示，通常称它为李代数 g 的伴随

表示或正则表示。一个 r 维李代数必对应一个 r 维的伴随表示。与有限群的正则表示不同，一般说来，李代数的伴随表示并不一定是忠实表示，但对半单李代数，其伴随表示是忠实表示。它可能是可约的或不可约表示。虽然由伴随表示并不能充分区分同一个李代数的两个不同元素，然而却可严格区分两个不同的李代数，因此可借助于李代数的伴随表示来充分地对李代数进行分类。

§7.2 半单李代数的表示和权图

2—1 权与权空间

设 g 是一个 r 维 l 秩半单李代数，而其嘉当一韦耳基为 H_i $(i=1,2,\cdots,l)$ 和 $\{E_\alpha\}$，若 A 是 g 的一个表示，则其相应的矩阵 $A(H_i)$ 和 $A(E_\alpha)$ 应满足李代数 g 的这组基的同样对易关系，即

$$
\begin{aligned}
&[A(H_i),A(H_j)]=0, \quad (i,j=1,2,\cdots,l)\\
&[A(H_i),A(E_\alpha)]=\alpha_i A(E_\alpha)\\
&[A(E_\alpha),A(E_{-\alpha})]=\alpha^i A(H_i)\\
&[A(E_\alpha),A(E_\beta)]=N_{\alpha\beta}A(E_{\alpha+\beta}) \quad (\alpha\neq\beta)
\end{aligned} \tag{7.2.1}
$$

为方便起见，下面将直接以 H_i 和 E_α 分别代表矩阵 $A(H_i)$ 和 $A(E_\alpha)$，其对应的表示空间为 V，既然矩阵 $H_i(i=1,2,\cdots,l)$ 是相互对易的，在该表示空间 V 中应有共同的本征矢 $|\vec{m}>$，满足

$$
H_i|\vec{m}>=m_i|\vec{m}>,(i=1,2,\cdots l) \tag{7.2.2}
$$

$\vec{m}$ 有 l 个分量 $m_i(i=1,2,\cdots,l)$，称其为本征矢 $|\vec{m}>$ 的权矢量或简称权，而这个 l 维矢量空间 V 又称之权空间。若在 l 维空间中，由原点画出不可约表示的所有权矢，则称此图为该不可约表示的权图。其恒等表示是 l 维表示，它的权图只是原点。

定理 7.4：若 $|\vec{m}>$ 是权 $\vec{m}$ 的本征矢，则 $E_\alpha|\vec{m}>$ 为权 $\vec{m}+\vec{\alpha}$ 的

本征矢。

证明：由李代数结构得

$$[H_i, E_\alpha] = H_i E_\alpha - E_\alpha H_i = \alpha_i E_\alpha$$

上式两边同时对本征矢$|\vec{m}>$作用，则得

$$H_i(E_\alpha|\vec{m}>) = E_\alpha H_i|\vec{m}> + \alpha_i E_\alpha|\vec{m}>$$

$$= (m_i + \alpha_i)(E_\alpha|\vec{m}>)(i = 1, 2, \cdots, l) \quad (7.2.3)$$

所以本征矢 $E_\alpha|\vec{m}>$的权为 $\vec{m}+\vec{\alpha}$。

定理 7.5：半单李代数的任何表示空间 V 至少有一个权。

证明：在表示空间 V 中，H_1 对应的表示矩阵至少有一个本征值 m_1，设 V_1 是由本征值为 m_1 的本征矢展开的 V 的子空间，若取 $|\Lambda>\in V_1$，因为 $H_1H_2|\Lambda>=H_2H_1|\Lambda>=m_1H_2|\Lambda>$，故有 $H_2|\Lambda>\in V_1$，因此 V_1 也是 H_2 的不变子空间，它至少也有一个本征值为 m_2 的本征矢。这样继续下去，每个 H_i 在它的不变子空间中至少有一个本征矢，其相应本征值是 m_i，从而得到 V 的不变子空间相应的 H_i 的共同本征矢，其相应的权是 $\vec{m}=(m_1, m_2, \cdots, m_l)$。

定理 7.6：具有不同权的本征矢是线性独立的。

证明：设本征矢$|\vec{A}>$的权为 $\vec{A}$，而本征矢$|\vec{\Lambda}^{(k)}>$的权为$\vec{\Lambda}^{(k)}$，如果本征矢$|\vec{A}>$与$|\vec{\Lambda}^{(k)}>$不是线性独立的，则必有

$$|\vec{A}> = \sum_k a_k|\vec{\Lambda}^{(k)}> \quad (7.2.4)$$

引入算符 $\prod_k \mu_i(H_i - \Lambda_i^{(k)})$，$\mu_i$ 为任意复数，让此算符作用于(7.2.4)式两边，则得

$$\prod_k \mu_i(H_i - \Lambda_i^{(k)})|\vec{A}> = \prod_k \mu_i(A_i - \Lambda_i^{(k)})|\vec{A}> = 0$$

由于 $A_i \neq \Lambda_i^{(k)}$，而 μ_i 为任意复数，上式成立只有$|\vec{A}>=0$，即具有不同权的本征矢是线性独立的。因此在 n 维表示空间中，最多只

能有 n 个不同权。若一个权同时对应着 γ 个线性独立的本征矢，则称该权为 γ 重权；若一个权对应的线性独立本征矢只有一个，则称这个权为单权。

如正根定义一样，第一个非零权分量为正数的权称之正权，类似地可定义负权和零权。若两个权之差 $\vec{m}-\vec{m}'$ 的第一个非零分量是正数，则称权 $\vec{m}$ 高于权 $\vec{m}'$。从定理 7.4 可知，正根 α 对应的生成元 E_α 称之升权算符，$E_{-\alpha}$ 称之降权算符。在有限维表示中，必有一个权 $\vec{M}$ 高于所有其它权，则称其为该表示的最高权。显然，升权算符作用在最高权的本征矢上必为零，即

$$E_\alpha|\vec{M}>=0,\ (\alpha\ 为正根) \tag{7.2.5}$$

由根和权的讨论不难看出，这两者都是 l 维矢量（l 为李代数之秩），从定理 7.4 可知它俩有着相似的对称性；然而它们也存在着本质的不同，根只取决于李代数结构，而与表示无关，它以(6.3.18)式为其本征方程；然而，权的分布依赖于李代数的表示，不同表示将对应不同的权图，其本征方程为(7.2.2)式。同一个李代数只有一个根图，但其权图可有多种形式。

2—2 权的基本性质

定理 7.7：若 $\vec{m}$ 为半单李代数 g 的某表示的一个权，$\vec{\alpha}$ 为 g 的一个根，则有

1° $2(\vec{m}\cdot\vec{\alpha})/(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha})$ 是整数，且 $\vec{m}'=\vec{m}-2\vec{\alpha}(\vec{m}\cdot\vec{\alpha})/(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha})$ 也是该表示的一个权，称 $\vec{m}'$ 和 $\vec{m}$ 互为等价权。

2° 等价权有相同的重数。

3° 若 $\vec{m}$ 为单权，则存在一个含 $\vec{m}$ 的 $\vec{\alpha}$ 权链：$\vec{m}-p\vec{\alpha}$，$\vec{m}-(p-1)\vec{\alpha}$，…，$\vec{m}+(q-1)\vec{\alpha}$，$\vec{m}+q\vec{\alpha}$，使之 $\vec{m}-(p+1)\vec{\alpha}$ 和 $\vec{m}+(q+1)\vec{\alpha}$ 不是权，而 p 和 q 皆为零或正整数，并满足

$$2(\vec{m}\cdot\vec{\alpha})/(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha})=p-q \tag{7.2.6}$$

该定理的证明类似定理 6.8，等价权 $\vec{m}'$ 与 $\vec{m}$ 之间的关系也类似有图 6.1 的韦耳反射，即 $\vec{m}'$ 为对于垂直根矢 $\vec{\alpha}$ 超面的镜像，在一组等价权中的最高权称之支配权。

设 V_n 是李代数 g 的 n 维表示空间，在 V_n 中我们可选取一组基矢 $|\xi_1>$，$|\xi_2>$，…，$|\xi_n>$，若 Λ_i 是 $|\xi_i>$ 的权，且满足

$$\Lambda_1 \geqslant \Lambda_2 \geqslant \Lambda_3 \geqslant \cdots \geqslant \Lambda_n \qquad (7.2.7)$$

则称这组基 $\{|\xi_i>\}$ 为 V_n 的正则基。

为了说明李代数表示空间与权空间的概念，我们以角动量为例，它由 so (3) 李代数来描述，对于角动量为 2 的表示（最高权为 2），这是个 5 维表示，它有 5 个本征态，对应的 5 个权分别为 -2，-1，0，1，2。但 so (3) 是个 $l=1$ 的李代数，其权空间仅是 1 维的。可见表示空间和权空间是两个不同概念，权空间取决于李代数的秩，而权的数目及其分布取决于表示，即可以一组权矢量来标征李代数的表示。

定理 7.8 (最高权定理)：半单李代数不可约表示的最高权是单权；两个等价表示的最高权相同。

定理 7.9：$\vec{\Lambda}$ 为半单李代数不可约表示的最高权的充要条件是 Λ_α 为非负整数，其中

$$\Lambda_\alpha = \frac{2(\vec{\Lambda} \cdot \vec{\alpha})}{(\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha})}, (\vec{\alpha} \in \Pi) \qquad (7.2.8)$$

设 $|\vec{\Lambda}>$ 是某个不可约表示的最高权 $\vec{\Lambda}$ 对应的本征矢，而 $\vec{\alpha} \in \Pi$，则有

$$E_{-\alpha}^k |\vec{\Lambda}> \begin{cases} =0 & \text{当 } k > \Lambda_\alpha \\ \neq 0 & \text{当 } k \leqslant \Lambda_\alpha \end{cases} \qquad (7.2.9)$$

最高权与不等价不可约表示间存有一一对应关系，而定理 7.9又告诉我们，最高权 $\vec{\Lambda}$ 与一组非负整数 $\{\Lambda_\alpha\}$ 一一对应，因此常用最高权或相应的 l 个非负整数来标记李代数的不可约表示。

定理 7. 10：半单李代数的任何有限维表示或是不可约表示，或是完全可约表示。

我们只需讨论其有限维不可约表示，因为任何有限维其它表示皆等价于不可约表示的直和。

2—3 单李代数不可约表示的标记及权图

根据定理 7. 8 和 7. 9，对于 l 秩的单李代数 g，可用 l 个由最高权 $\vec{\Lambda}$ 和素根 $\vec{\alpha}\in\Pi$ 相应的非负整数 Λ_1，Λ_2，…，Λ_l 来标记其每个不可约表示，通常将每个数 Λ_α 标在该李代数邓金图相应素根 $\vec{\alpha}$ 的上方，为明确起见，以后以"○"和"●"分别代表长根和短根，Λ_α 皆为零的表示对应李代数的 1 维恒等表示，这样从每个不可约表示的最高权 $\vec{\Lambda}$ 和某个素根 $\vec{\alpha}$，则可导出该表示存在的一个 $\vec{\Lambda}$，$\vec{\Lambda}-\vec{\alpha}$，…，$\vec{\Lambda}-K_\alpha\vec{\alpha}$ 的权链，如果 l 个 Λ_α 中只有一个为 1，其余全为零，则称这样的表示为基础表示，显然，每个 l 秩李代数只有 l 个基础表示，而基础表示的最高权又称基本权，如图 7. 1 所示的邓金图皆为基础表示。

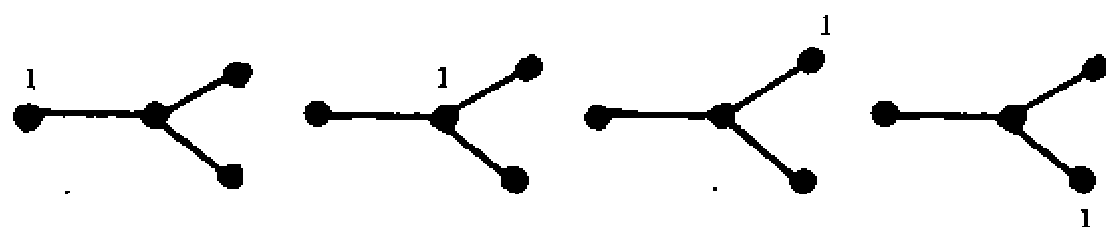


图 7. 1 基础表示

若以 $D^{[\alpha]}$ 标记 $\Lambda_\alpha=1$ 的相应基础表示，以 $\vec{M}^{(\alpha)}$ 标记 $D^{[\alpha]}$ 的基本权，一个 l 秩半单李代数共有 l 个基本权，称 $\{\vec{M}^{(\alpha)}\}$ 为基本权系，对于素根 $\vec{\beta}$，由定理 7. 9 和基础表示的定义可知

$$\frac{2(\vec{M}^{(\alpha)}\cdot\vec{\beta})}{(\vec{\beta}\cdot\vec{\beta})}=\delta_{\alpha\beta} \qquad (7.2.10)$$

若 $\vec{\Lambda}$ 为某个不可约表示的最高权，则不难推得

$$\vec{\Lambda}=\sum_{\alpha\in\Pi}\Lambda_\alpha\vec{M}^{(\alpha)} \tag{7.2.11}$$

上式证明很简单，只要用 $2\vec{\beta}/(\vec{\beta}\cdot\vec{\beta})$ 对此式两边同时作内积，并利用(7.2.10)式即可验证。

既然最高权 $\vec{\Lambda}$ 或其相应的 l 个非负整数 Λ_α（$\alpha=1$，2，…，l）可表征李代数的不可约表示 $D^{(\vec{\Lambda})}=D^{(\Lambda_1,\Lambda_2,\cdots,\Lambda_l)}$，则由（7.2.11）式可知，李代数的任何不可约表示的最高权都是其基本权系的线性组合，$\vec{\Lambda}$ 相对于基本权系 $\{\vec{M}^{(1)},\vec{M}^{(2)},\cdots,\vec{M}^{(l)}\}$ 的分量分别是这 l 个非负整数 Λ_1，Λ_2，…，Λ_l。只要晓得李代数的所有基本权，则根据给定的不可约表示对应的邓金图立即可求出该表示的最高权。

例 1　单李代数 A_2 的不可约表示如图 7.2（a）所示。

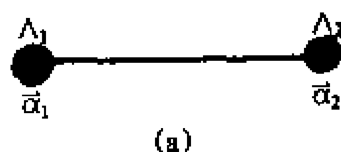
若设某个不可约表示的最高权 $\vec{M}=a\vec{\alpha}_1+b\vec{\alpha}_2$，由于 $(\vec{\alpha}_1\cdot\vec{\alpha}_1)=(\vec{\alpha}_2\cdot\vec{\alpha}_2)=1$，$(\vec{\alpha}_1\cdot\vec{\alpha}_2)=-\frac{1}{2}$，则由(7.2.8)式得

$$\Lambda_1=\frac{2(\vec{M}\cdot\vec{\alpha}_1)}{(\vec{\alpha}_1\cdot\vec{\alpha}_1)}=2a-b,$$

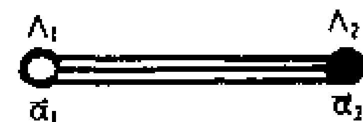
$$\Lambda_2=\frac{2(\vec{M}\cdot\vec{\alpha}_2)}{(\vec{\alpha}_2\cdot\vec{\alpha}_2)}=-a+2b$$

故 A_2 此表示的最高权为

$$\vec{M}=\frac{1}{3}(2\Lambda_1+\Lambda_2)\vec{\alpha}_1+\frac{1}{3}(\Lambda_1+2\Lambda_2)\vec{\alpha}_2 \tag{7.2.12a}$$



(a)



(b)

图 7.2　A_2 和 G_2 的不可约表示

显然 A_2 有两个基础表示，其基本权分别对应于$(\Lambda_1,\Lambda_2)=(1,0)$和$(0,1)$，故 A_2 的两个基本权分别为

$$\vec{M}^{(1)}=\frac{2}{3}\vec{\alpha}_1+\frac{1}{3}\vec{\alpha}_2,\quad \vec{M}^{(2)}=\frac{1}{3}\vec{\alpha}_1+\frac{2}{2}\vec{\alpha}_2 \tag{7.2.12b}$$

例 2　李代数 G_2 的不可约表示如图 7.2(b)所示。

若设相应表示的最高权为 $\vec{M}=a\,\vec{\alpha}_1+b\,\vec{\alpha}_2$，由于$(\vec{\alpha}_1\cdot\vec{\alpha}_1)=3$，$(\vec{\alpha}_2\cdot\vec{\alpha}_2)=1$，$(\vec{\alpha}_1\cdot\vec{\alpha}_2)=-\frac{3}{2}$，由此可选取两个素根坐标为 $\vec{\alpha}_1=(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2})$和 $\vec{\alpha}_2=(0,1)$，从而推得

$$a=2\Lambda_1+\Lambda_2\quad b=3\Lambda_1+2\Lambda_2$$

故其最高权为

$$\vec{M}=(3\Lambda_1+\Lambda_2)\vec{\alpha}_1+(3\Lambda_1+2\Lambda_2)\vec{\alpha}_2 \tag{7.2.13}$$

其相应的两个基本权为

$$\vec{M}^{(1)}=2\vec{\alpha}_1+3\vec{\alpha}_2,\quad \vec{M}^{(2)}=\vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2 \tag{7.2.14}$$

只要在 l 维矢量空间中选定 l 个素根的坐标，立即可求得各种不可约表示的最高权及其相应权图。

对于李代数 A_l,D_l,E_6,E_7 和 E_8，它们的不可约表示可以图 7.3 代表

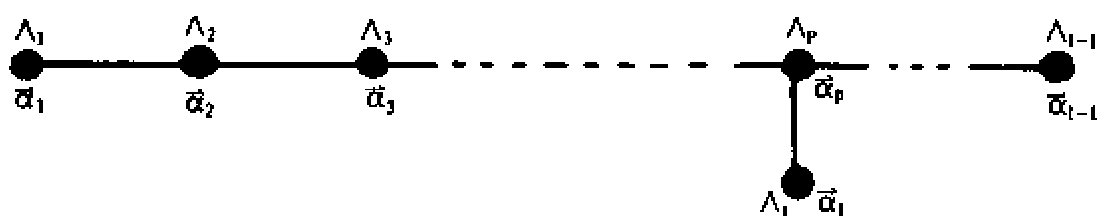


图 7.3　李代数 A_l,D_l,E_6,E_7 和 E_8 不可约表示

李代数 A_l 相应于 $p=l-1$，在 D_l 相应于 $p=l-2$，E_6 对应于 $p=3$ 和 $l=6$，E_7 对应于 $p=3$ 和 $l=7$，E_8 对应于 $p=5$ 和 $l=8$。这些李代数的每个不可约表示，其最高权可写为：

$$\vec{M}=\sum_{k=1}^{l}a_k\vec{\alpha}_k, \tag{7.2.15a}$$

$$a_k=\frac{1}{\triangle}\xi_k\Lambda, \tag{7.2.15b}$$

具体计算 ξ_k^i 的值由表 7.1 给出，其最高权又可写为

$$\vec{M}=\frac{1}{\triangle}\sum_{k=1}^{l}\xi_k^i\Lambda_i\vec{\alpha}_k \quad (\vec{\alpha}_k\in\Pi) \tag{7.2.16a}$$

$$\triangle=p+l(2-p) \quad \delta=l-p-2 \tag{7.2.16b}$$

表 7.1　A_l,D_l,E_6,E_7 和 E_8 的最高权参数 ξ_k^i

ξ_k^i	$1\leqslant i\leqslant p\text{-}1$	$p\leqslant i\leqslant l\text{-}1$	l
$1\leqslant k\leqslant p\text{-}1$	$k(\triangle+i\delta)$ $i(\triangle+k\delta)$	$2k(l-i)$	$k(l-p)$
$p\leqslant k\leqslant l-1$	$i(l-k)$	$(l-i)[p^2+k(2-p)]$ $(l-k)[p^2+i(2-p)]$	
l	$i(l-p)$	$p(l-i)$	l

若以"○"和"●"分别代表长根和短根，则李代数 B_l,C_l 和 F_4 的不可约表示如图 7.4 所示。

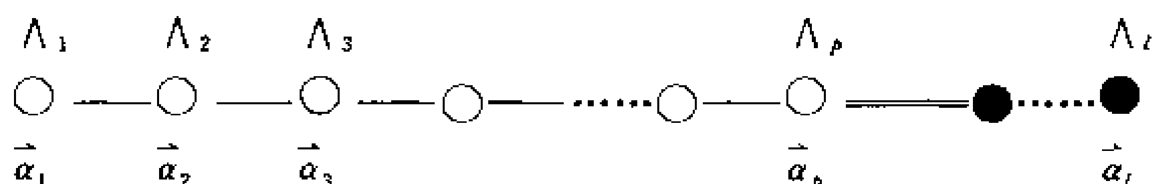


图 7.4　李代数 B_l,C_l 和 F_4 的不可约表示

其中，李代数 B_l 和 C_l 分别对应 $p=l-1$和 $p=1$，而 F_4 对应于 $p=2$和 $l=4$，其不可约表示的最高权为

$$\vec{M}=\sum_{k=1}^{l}a_k\vec{\alpha}_k,(\vec{\alpha}\in\Pi), \tag{7.2.17a}$$

$$a_k=\frac{1}{\triangle}\xi_k^i\Lambda_i \tag{7.2.17b}$$

ξ_k^i 的数值由表 7.2 给出。

表 7.2　B_l, C_l 和 F_4 李代数的最高权参数 ξ_k^i

ξ_k^i	$1\leqslant i\leqslant p-1$	p	$p+1\leqslant i\leqslant l$
$1\leqslant k\leqslant p-1$	$k[\triangle-i(l-p-1)]$ $i[\triangle-k(l-p-1)]$	$k(l+1-p)$	$k(l+1-i)$
p	$i(l+1-p)$	$p(l+1-p)$	$p(l+1-i)$
$p+1\leqslant k\leqslant l$	$2i(l+1-k)$	$2p(l+1-k)$	$(l+1-i)[p(p+1)-k(p-1)]$ $(l+1-k)[p(p+1)-i(p-1)]$

利用最高权及权的基本性质，不难画出李代数不可约表示的权图，再结合第四章介绍的杨盘方法可方便地研讨任何半单李代数的不可约表示，读者若对各种单李代数的表示需要详细的了解，可参阅有关参考书，如 J. F. Cornwell 书 AppendixF. 以下将以常用的 $su(2)$ 和 $su(3)$ 为例来进一步讨论李代数的不可约表示及其权图。

例 3　$su(2)$李代数(A_1)不可约表示权图

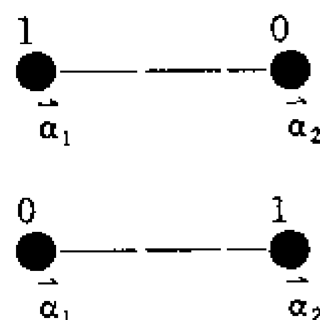
A_1 的根图是 1 维的，其素根为 $\vec{\alpha}$，它只有一个基础表示，令基本权 $\vec{m}=a\,\vec{\alpha}$，则由

$$\Lambda_1=\frac{2(\vec{m},\vec{\alpha})}{(\vec{\alpha},\vec{\alpha})}=2a=1$$

若取素根长为 1，$su(2)$的基本权为 $m=1/2$。由韦耳反射得其等价权为 $-\frac{1}{2}$，显然这是个 2 维表示。该李代数的其它不可约表示的最

高权 $\vec{M}$ 必为基本权的正整数倍，即 $M=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\cdots$，分别对应 $su(2)$ 的 1 维恒等表示 D_0，2 维矢量表示 $D_{1/2}$，3 维表示 D_1 和 4 维表示 $D_{3/2}$ 等，其相应的杨图分别为：$\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}$，$\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline\end{array}$，$\begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline\end{array}$ 和 $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & \ \\ \hline\end{array}$。

例 4　A_2 不可约表示的权图



A_2 是秩 $l=2$ 的李代数，其两个基础表示对应的邓金图为左图的 (1,0) 和 (0,1)，取归一化的两个素根坐标分别为 $\vec{\alpha}_1=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ 和 $\vec{\alpha}_2=(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$，由 (7.2.12) 式立即可求出两个基本权为

$$\vec{M}^{(1)}=\frac{2}{3}\vec{\alpha}_1+\frac{1}{3}\vec{\alpha}_2=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6})$$

$$\vec{M}^{(2)}=\frac{1}{3}\vec{\alpha}_1+\frac{2}{3}\vec{\alpha}_2=(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6})$$

两个基础表示的权图分别如图 7.5(a) 和 (b) 所示，三角形的每个顶点相应表示的权矢量。

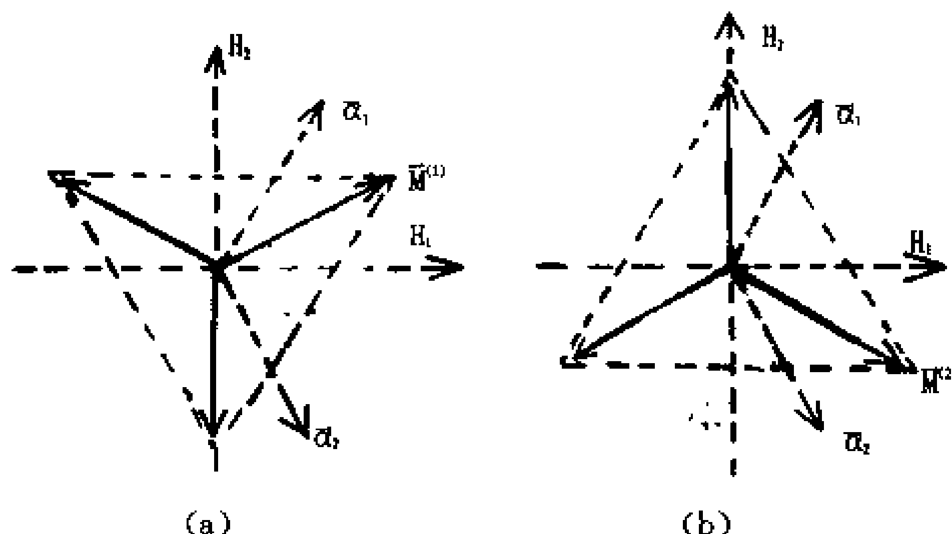


图 7.5　A_2 基础表示的权图

若 A_2 某个不可约表示的邓金图为 $\overset{3}{\underset{\vec{\alpha}_1}{\bullet}}$——$\overset{2}{\underset{\vec{\alpha}_2}{\bullet}}$，即该表示的最高权 $\vec{M}$ 分别对应于

$$\Lambda_1=\frac{2(\vec{M},\vec{\alpha}_1)}{(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_1)}=3,\ \Lambda_2=\frac{2(\vec{M}.\vec{\alpha}_2)}{(\vec{\alpha}_2\cdot\vec{\alpha}_2)}=2$$

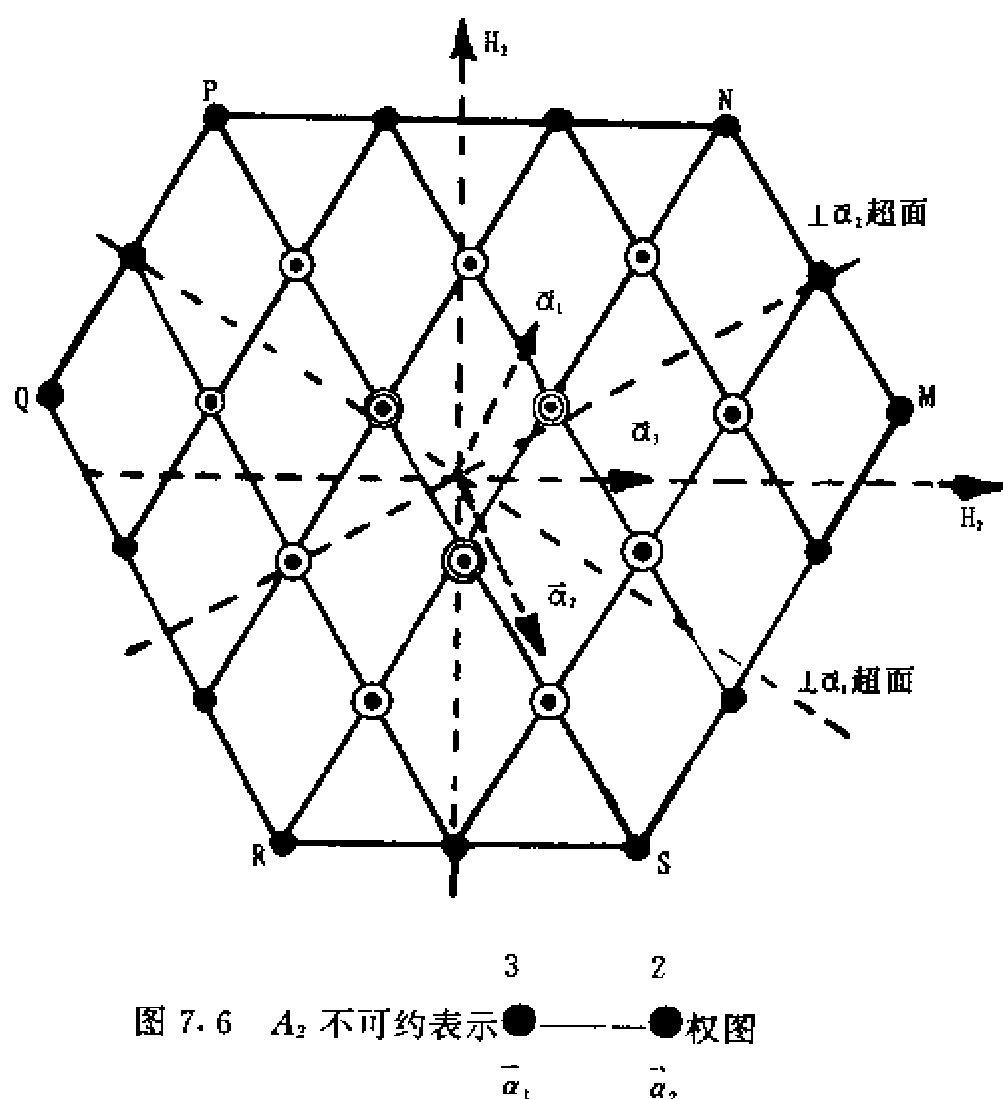


图 7.6　A_2 不可约表示 $\overset{3}{\underset{\vec{\alpha}_1}{\bullet}}$——$\overset{2}{\underset{\vec{\alpha}_2}{\bullet}}$ 权图

由（7. 2. 11）式推得其最高权为

$$\vec{M}=\frac{8}{3}\vec{\alpha}_1+\frac{7}{3}\vec{\alpha}_2=\frac{8}{3}\ (\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2})\ +\frac{7}{3}\ (\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$= \left(\frac{5}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

若在 (H_1, H_2) 的嘉当子空间中以 M 点代表其最高权 $\vec{M}$，再作出 $\vec{M}$ 相对于三个正根的韦耳反射，分别可得到其等价权对应的 S，N，Q，P 和 R 点，这些权皆为单权，连结这六个点可得到一个形似纺锤的六边形，显然不可能有权落在这个六边形之外，否则 $\vec{M}$ 就不是最高权。然后，从最高权出发，用素根 $\vec{\alpha}_1$ 和 $\vec{\alpha}_2$ 逐一求其相应的权链，这样就在这个六边形内分成以素根为边长的许多菱形，其每个交点就代表该表示的一个权，最外层为单权，第二层为 2 重权，以"⊙"表示，第三层为 3 重权，以"◎"表示…，一直到最内层为边长等于素根长的三角形为止，如图 7.6 所示。当然所有权矢对应的本征矢的总数应为该表示的维数，这是个 $15\times1+9\times2+3\times3=42$ 维表示，它恰好对应于第四章介绍过的 $SU(3)$ 群不可约表示的杨图为图 7.7；由罗宾逊公式不难求得该表示维数

$$r_3^{(p_1, p_2)} = r_3^{(3,2)} = \prod_{i,j} \frac{(3+j-i)}{g_{ij}} = 42$$

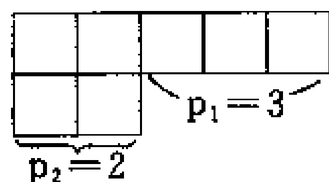


图 7.7 A_2 不可约表示 $\overset{3}{\underset{\alpha_1}{\bullet}}\cdots\cdots\overset{2}{\underset{\alpha_2}{\bullet}}$ 的杨图

其结果与权图一致，在实际应用中将两者结合起来，将使不可约表示的权图画法简化，如果再适当利用标准盘，还可给出每个不可约表示的基矢，这将在讨论李代数的应用时具体介绍。

2—4 不可约表示维数

经典李群不可约张量表示及其维数，曾在第四章详细讨论过，现在依据上述给出的李代数根权性质，再进一步从另个方面探讨李代数不可约表示的维数及其完备

权集。

对于李代数 A_l ($su(l+1)$)，可以证明其基础表示就是行数 $\leqslant l$，且只有一列方格的杨图相应的表示，由此可得到如下的对应关系。

$$D^{(1,0,\cdots,0)} = D^{(1,0,0,0,\cdots,0)} \longrightarrow \square$$

$$D^{(0,1,0,\cdots,0)} = D^{(1,1,0,\cdots,0)} \longrightarrow \text{(2 个方格一列)}$$

$$\cdots \tag{7.2.18}$$

$$D^{(0,0,\cdots,1)} = D^{(1,1,\cdots,1)} \longrightarrow \text{(一列)}\ \} l \text{ 个方格}$$

一般说来，若以 $D^{(K)} = D^{(K_1,K_2,\cdots,K_{l+1})}$ 代表李代数 A_l 的 K 阶张量不可约表示，$\sum_i K_i = K$，则配分 $[K]$ 与 $\{\Lambda_\alpha\}$ 之间的关系为

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= K_1 - K_2 \\ \Lambda_2 &= K_2 - K_3 \\ &\cdots \\ \Lambda_l &= K_l - K_{l+1} \end{aligned} \tag{7.2.19}$$

定理 7.10 (韦耳定理)：设 $\sum_+$ 是半单李代数的全体正根集合，则以最高权 $\vec{\Lambda}$ 标记的不可约表示维数 $d(\Lambda_1, \Lambda_2, \cdots, \Lambda_l)$ 由下面的韦耳公式给出：

$$d(\Lambda_1, \Lambda_2, \cdots, \Lambda_l) = \prod_{\alpha \in \sum_+} \frac{[(\vec{\Lambda} + \vec{R}) \cdot \vec{\alpha}]}{(\vec{R} \cdot \vec{\alpha})} \tag{7.2.20}$$

其中 $\vec{R}$ 由(6.5.1)式给出，即

$$\vec{R} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \sum_+} \vec{\alpha}$$

例如　求 $su(3)$ 不可约表示维数。

若取 A_2 的 3 个正根为

$$\vec{\alpha}_1=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}),\vec{\alpha}_2=(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}),\vec{\alpha}_3=(1,0)$$

则有 $\vec{R}=\frac{1}{2}(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3)=(1,0)$，由(7.2.12)式得表示 $D^{(0,1)}$ 的最高权为 $\vec{\Lambda}=\frac{1}{3}\vec{\alpha}_1+\frac{2}{3}\vec{\alpha}_2$，从而有

$$\frac{(\vec{\Lambda}\cdot\vec{\alpha}_1)}{(\vec{R}\cdot\vec{\alpha}_1)}=0,\frac{(\vec{\Lambda}\cdot\vec{\alpha}_2)}{(\vec{R}\cdot\vec{\alpha}_2)}=1,\frac{(\vec{\Lambda}\cdot\vec{\alpha}_3)}{(\vec{R}\cdot\vec{\alpha}_3)}=\frac{1}{2}$$

。由韦耳公式得不可约表示 $D^{(0,1)}$ 的维数为

$$d(0,1)=(1+0)(1+1)(1+\frac{1}{2})=3$$

同理可得 A_2 不可约表示 $D^{(1,0)}$ 的维数为

$$d(1,0)=3$$

$su(3)$ 不可约表示 $D^{(1,1)}$ 的邓金图和杨图前面已给出，由(7.2.12)式推得其最高权为 $\vec{\Lambda}=\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$，故有 $\frac{(\vec{\Lambda}\cdot\vec{\alpha}_1)}{(\vec{R}\cdot\vec{\alpha}_1)}=1,\frac{(\vec{\Lambda}\cdot\vec{\alpha}_2)}{(\vec{R}\cdot\vec{\alpha}_2)}=1,$

$\frac{(\vec{\Lambda}\cdot\vec{\alpha}_3)}{(\vec{R}\cdot\vec{\alpha}_3)}=1$，代入韦耳公式得

$$d(1,1)=(1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)=8$$

同理由(7.2.12)式可算得 A_2 不可约表示 $D^{(2,0)}$ 的最高权 $\vec{\Lambda}=\frac{4}{3}\vec{\alpha}_1+\frac{2}{3}\vec{\alpha}_2$，类似地可求得其不可约表示维数为

$$d(2,0)=(1+2)\cdot(1+0)\cdot(1+1)=6$$

利用韦耳公式不难求得 A_2 李代数不可约表示 $D^{(\Lambda_1,\Lambda_2)}$ 的维数为

$$d(\Lambda_1,\Lambda_2)=\frac{1}{2}(\Lambda_1+1)(\Lambda_2+1)(\Lambda_1+\Lambda_2+2)$$

此式与第四章介绍的由鲁宾孙公式求得维数公式完全一致，下面给出其它2秩李代数不可约表示的维数。因李代数 B_2 与 C_2 同构，它们不可约表示 $D^{(\Lambda_1,\Lambda_2)}$ 的维数 $d(\Lambda_1,\Lambda_2)$ 分别为

$$d(0,0)=1$$

$d(1,0)=4$

$d(0,1)=5$

$d(2,0)=10$

$d(0,2)=14$

$d(1,1)=16$

利用韦耳定理还可求得李代数 G_2 不可约表示 $D^{(\Lambda_1,\Lambda_2)}$的维数为

$$
\begin{aligned}
d(\Lambda_1,\Lambda_2)=&(1+\Lambda_1)(1+\Lambda_2)[1+(\Lambda_1+\Lambda_2)/2] \\
&[1+(2\Lambda_1+\Lambda_2)/3][1+(3\Lambda_1+\Lambda_2)/4] \\
&[1+(3\Lambda_1+2\Lambda_2)/5] \qquad (7.2.21)
\end{aligned}
$$

此式与(7.3.7)式是一致的。

利用韦耳定理还可给出各种经典李代数的表示维数公式：

$$
d(A_l)=\prod_{j,i}\left(1+\frac{\Lambda_i+\Lambda_{i+1}+\cdots\Lambda_{i+j}}{j+1}\right) \qquad (7.2.22)
$$

$(j=0,1,2,\cdots,l-1;i=1,2,\cdots,l-j)$

如 A_5 不可约表示 $D^{(\Lambda_1,\Lambda_2,\cdots,\Lambda_5)}$的维数为

$$
\begin{aligned}
d(A_5)=&(1+\Lambda_1)(1+\Lambda_2)(1+\Lambda_3)(1+\Lambda_4) \\
&(1+\Lambda_5)\left(1+\frac{\Lambda_1+\Lambda_2}{2}\right)\left(1+\frac{\Lambda_2+\Lambda_3}{2}\right) \\
&\left(1+\frac{\Lambda_3+\Lambda_4}{2}\right)\left(1+\frac{\Lambda_4+\Lambda_5}{2}\right) \\
&\left(1+\frac{\Lambda_1+\Lambda_2+\Lambda_3}{3}\right)\left(1+\frac{\Lambda_2+\Lambda_3+\Lambda_4}{3}\right) \\
&\left(1+\frac{\Lambda_3+\Lambda_4+\Lambda_5}{3}\right)\left(1+\frac{\Lambda_1+\Lambda_2+\Lambda_3+\Lambda_4}{4}\right) \\
&\left(1+\frac{\Lambda_2+\Lambda_3+\Lambda_4+\Lambda_5}{4}\right) \\
&\left(1+\frac{\Lambda_1+\Lambda_2+\Lambda_3+\Lambda_4+\Lambda_5}{5}\right)
\end{aligned}
$$

$$d(B_l)=d(A_l)\cdot\prod_{j,i}\left(1+\frac{\Lambda_i+\Lambda_{i+1}+\cdots 2\Lambda_j+\cdots+2\Lambda_{l-1}+\Lambda_l}{2l+1-i-j}\right)$$

$$(j=1,2,\cdots,l-1;i=1,2,\cdots,j) \tag{7.2.23}$$

$$d(C_l)=d(A_l)\cdot\prod_{j,i}\left(1+\frac{\Lambda_i+\Lambda_{i+1}+\cdots 2\Lambda_j+\cdots+2\Lambda_l}{2l+2-i-j}\right)$$

$$(j=2,3,\cdots,l;i=1,2,\cdots,j-1) \tag{7.2.24}$$

$$d(D_l)=\frac{2d(A_l)}{2+\Lambda_{l-1}+\Lambda_l}\cdot\prod_{k}\left(1+\frac{\Lambda_k+\Lambda_{k+1}+\cdots\Lambda_{l-2}+\Lambda_l}{l-k}\right)$$

$$\prod_{j,i}\left(1+\frac{\Lambda_i+\Lambda_{i+1}+\cdots+2\Lambda_j+\cdots 2\Lambda_{l-2}+\Lambda_{l-1}+\Lambda_l}{2l-i-j}\right)$$

$$(k=1,2,\cdots,l-2;j=2,3,\cdots,l-2;i=1,2,\cdots,j-1) \tag{7.2.25}$$

利用韦耳定理当然也可算出李代数 F_4，E_6，E_7 和 E_8 的维数公式，但其表达式也很冗长，若工作需要可查阅有关专著。

虽然最高权可唯一地决定李代数的不可约表示，但在物理应用中还往往需要求出某个不可约表示的完备权集，我们前面曾画出李代数 A_2 不可约表示 {3, 2} 的权图，它是由根权性质做出的，同时我们还可以从第四章介绍的杨图相应的不可约表示出发，给出该表示相应的全部标准盘，由这些标准盘集也可方便求出表示基矢的相应完备权集，这将在下面讨论强子的分类时具体介绍。

§7. 3 直积表示及其约化

如群的直积表示一样，也可定义李代数 g 的直积表示。不论就表示论本身，还是对李代数的实际应用而言，研究它的直积表示及其约化都是十分重要的。对于有限群，可用特征标理论将直积表示约化为该群某些不可约表示的直和，并求出每个不可约表示的重复度；对于置换群的直积表示，可分为内积和外积，其内

积约化即是有限群的直积表示约化，而外积约化可借助于杨盘法，并可将这种方法推行到各种经典群不可约张量表示的直积表示约化，它可方便地求出经典群的直积表示所包含的各种不可约张量表示，由鲁宾孙公式推算其表示维数，并由不可约张量表示对应的标准盘给出该表示的基矢，本节将从根权理论出发来探讨李代数的直积表示约化，不难看出这两种方法是相辅相成的。

设 $D^{(\mu)}=\{D^{(\mu)}_{(x)}\mid x\in g\}$ 和 $D^{(\gamma)}=\{D^{(\gamma)}(x)\mid x\in g\}$ 分别是李代数 g 的两个 n_μ 和 n_γ 维表示，则可定义

$D=\{D(x)=D^{(\mu)}_{(x)}\otimes D^{(\gamma)}_{(x)}\mid x\in g\}$ 也是 g 的一个表示，称其为 $D^{(\mu)}$ 与 $D^{(\gamma)}$ 的直积表示，并记为 $D=D^{(\mu)}\otimes D^{(\gamma)}$，其表示维数为 $n=n_\mu\cdot n_\gamma$。即使 $D^{(\mu)}$ 和 $D^{(\gamma)}$ 为 g 的两个不可约表示，但其直积表示一般是可约表示。若以"～"代表等价关系，则它等价于 g 的某些不可约表示的直和，即

$$D^{(\mu)}\otimes D^{(\gamma)}\sim\sum_{\lambda}{}^{\oplus}\Gamma_{\mu\gamma\lambda}D^{(\lambda)} \tag{7.3.1}$$

其中 $\Gamma_{\mu\gamma\lambda}$ 为其直积表示所包含不可约表示 $D^{(\lambda)}$ 的次数（重复度），在实际应用中求 $\Gamma_{\mu\gamma\lambda}$ 是相当重要的。直积表示 $D^{(\mu)}\otimes D^{(\gamma)}$ 有以下几个主要性质：

1° 如果 $D^{(\mu)}\sim D'^{(\mu)}$，$D^{(\gamma)}\sim D'^{(\gamma)}$，则 $D^{(\mu)}\otimes D^{(\gamma)}\sim D'^{(\mu)}\otimes D'^{(\gamma)}$；

2° $D^{(\mu)}\otimes D^{(\gamma)}\sim D^{(\gamma)}\otimes D^{(\mu)}$； (7.3.2)

3° $(D^{(\mu)}\otimes D^{(\gamma)})\otimes D^{(\lambda)}\sim D^{(\mu)}\otimes(D^{(\gamma)}\otimes D^{(\lambda)})$；

4° $(D^{(\mu)}\oplus D^{(\gamma)})\otimes D^{(\lambda)}\sim(D^{(\mu)}\otimes D^{(\lambda)})\oplus(D^{(\gamma)}\otimes D^{(\lambda)})$

设不可约表示 $D^{(\mu)}$ 和 $D^{(\lambda)}$ 的基矢分别为 $\varphi_i^{(\mu)}(i=1,2,\cdots,n_\mu)$ 和 $\varphi_j^{(\gamma)}(j=1,2,\cdots,n_\gamma)$，其相应权系 $\triangle^{(\mu)}$ 和 $\triangle^{(\gamma)}$ 分别对应 $D^{(\mu)}$ 和 $D^{(\gamma)}$ 的本征矢，定理 7.6 说明不仅不同权的本征矢是线性独立的，既然是不可约表示，则每个 γ 重权也必有 γ 个线性独立的本征矢（基矢），因此 $D^{(\mu)}$ 和 $D^{(\gamma)}$ 的直积表示空间将是这二个不可约表示的 $n_\mu\cdot n_\gamma$ 个基矢 $\varphi_i^{(\mu)}\varphi_j^{(\gamma)}$ 张开的空间，显然，基矢 $\varphi_i^{(\mu)}\varphi_j^{(\gamma)}$ 的权是 $\varphi_i^{(\mu)}$ 和 $\varphi_j^{(\gamma)}$

这两个相应权之和，一般讲直积表示等价于若干个不可约表示之直和，又由最高权定理可知，所包含的每个不可约表示必对应一个最高权，故李代数的直积表示约化就等价于从二个不可约表示相应的权系$\triangle^{(\mu)}$和$\triangle^{(\gamma)}$之和中分析其包含的不可约表示的最高权，具体步骤如下：

1° 作两个不可约表示权系之矢量和$\triangle=\triangle^{(\mu)}+\triangle^{(\gamma)}$，求出该直积表示的所有权；

2° 从权系$\triangle$中找出最高权$\vec{\Lambda}^{(1)}$，从而求出$\vec{\Lambda}^{(1)}$对应的不可约表示$D^{(1)}$及其全部权系$\triangle^{(1)}$；

3° 从$\triangle$中扣除属于不可约表示$D^{(1)}$的全部权$\triangle^{(1)}$，再重复上述(2)与(3)过程，直到全部权被扣除为止。相继又可得到所包含的不可约表示$D^{(2)},D^{(3)},\cdots,D^{(k)}$。下面将以两个实例阐明直积表示的约化过程。

例 1　李代数A_2直积表示$D^{\{0,1\}}\otimes D^{\{0,1\}}$的约化。

已知A_2的两个素根为$\vec{\alpha}_1$和$\vec{\alpha}_2$，不可约表示$D^{\{0,1\}}$的最高权为$\vec{M}^{(2)}=\frac{1}{3}(\vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2)$，该表示的权系$\triangle^{\{0,1\}}$由 3 个单权组成，即

$$\triangle^{\{0,1\}}=\left\{\frac{\vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2}{3},\frac{\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2}{3},\frac{-2\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2}{3}\right\}$$

则直积表示$\{0,1\}\otimes\{0,1\}$的权系为

$$\left\{\frac{2\vec{\alpha}_1+4\vec{\alpha}_2}{3},\frac{2\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2}{3},\frac{-\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2}{3},\frac{2\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2}{3},\frac{2\vec{\alpha}_1-2\vec{\alpha}_2}{3},\right.$$
$$\left.\frac{-\vec{\alpha}_1-2\vec{\alpha}_2}{3},\frac{-\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2}{3},\frac{-\vec{\alpha}_1-2\vec{\alpha}_2}{3},\frac{-4\vec{\alpha}_1-2\vec{\alpha}_2}{3}\right\}\quad(7.3.3)$$

由于$\frac{2\vec{\alpha}_1+4\vec{\alpha}_2}{3}$是$A_2$不可约表示$\{0,2\}$的最高权，该表示的权系为

$$\triangle^{\{0,2\}}=\left\{\frac{2\vec{\alpha}_1+4\vec{\alpha}_2}{3},\frac{2\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2}{3},\frac{2\vec{\alpha}_1-2\vec{\alpha}_2}{3},\frac{-\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2}{2},\right.$$
$$\left.\frac{-\vec{\alpha}_1-2\vec{\alpha}_2}{3},\frac{-4\vec{\alpha}_1-2\vec{\alpha}_2}{3}\right\}$$

从(7.3.3)式给出的权系中扣除权系$\triangle^{(0,2)}$,剩下的3个权为

$$\left\{\frac{2\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2}{3},\frac{-\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2}{3},\frac{-\vec{\alpha}_1-2\vec{\alpha}_2}{3}\right\}$$

这正是不可约表示$D^{(1,0)}$的权系$\triangle^{(1,0)}$,因此该直积约化可简单表为

$$\{0,1\}\otimes\{0,1\}=\{0,2\}\oplus\{1,0\}$$

按照这种方法对半单李代数的直积表示进行约化是普遍适用的标准方法，但从此例可看出，这种做法比较繁琐，尤其是对高维表示，其约化更为麻烦，在实际问题中，往往可依据所涉及李代数的特点，采用相应的特定方法可较简便地处理约化问题。

例2　李代数G_2不可约表示$\{0,1\}\otimes\{0,2\}$的约化。

在李代数每个不可约表示中,其每个权$\vec{M}$都可通过最高权$\vec{\Lambda}$来求得。设g为l秩李代数,权$\vec{M}$的分量形式为

$$M_i=\Lambda_i-\sum_{\vec{\alpha}\in\Pi}r_\alpha\alpha_i \tag{7.3.4}$$

r_α为非负整数,由于直积表示$D^{(\mu)}\otimes D^{(\gamma)}$所包含的每个不可约表示的任何权都必是这两个不可约表示权系$\triangle^{(\mu)}$和$\triangle^{(\gamma)}$的矢量和形式,若$D^{(\mu)}$和$D^{(\gamma)}$的最高权分别为$\vec{\Lambda}^{(\mu)}$和$\vec{\Lambda}^{(\gamma)}$,则由权的性质决定其所包含的每个不可约表示的最高权的第i分量Λ_i都必须$\geqslant 0$,所以直积表示所包含的不可约表示$D^{(\lambda)}$的最高权$\Lambda^{(\lambda)}$必满足

$$\Lambda_i^{(\lambda)}=(\Lambda_i^{(\mu)}+\Lambda_i^{(\gamma)})-\sum_{\vec{\alpha}\in\Pi}r_\alpha\alpha_i\geqslant 0 \tag{7.3.5}$$

当然,上式求得的$\Lambda_i^{(\lambda)}$并不一定都是对应g的不可约表示的最高权,它还必须确保$a_k^{(\lambda)}$为非负整数,其中

$$a_k^{(\lambda)}=\frac{2(\vec{\Lambda}^{(\lambda)}\cdot\vec{\alpha}_k)}{(\vec{\alpha}_k\cdot\vec{\alpha}_k)},(\vec{\alpha}_k\in\Pi) \tag{7.3.6}$$

从而排除(7.3.5)式的多余解,再根据所含不可约表示维数之和等于$n_\mu\cdot n_\gamma$,即可将直积表示约化为若干不可约表示的直和。

由于李代数 G_2 的二个素根 $\vec{\alpha}_1$ 和 $\vec{\alpha}_2$ 满足条件 $(\vec{\alpha}_1\cdot\vec{\alpha}_1)=3$，$(\vec{\alpha}_2\cdot\vec{\alpha}_2)=1$ 和 $(\vec{\alpha}_1\cdot\vec{\alpha}_2)=-\frac{3}{2}$，故可选取 $\vec{\alpha}_1=(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2})$ 和 $\vec{\alpha}_2=(0,1)$，设 $u_1=a_1^{(\lambda)}+a_2^{(\lambda)}$，$u_2=a_1^{(\lambda)}$，则 G_2 不可约表示 $D^{(\lambda)}$ 的维数为

$$N^{(\lambda)}=(u_1+u_2+3)(u_1+2)(2u_1+u_2+5)(u_1+2u_2+4)(u_1-u_2+1)(u_2+1)/120 \qquad (7.3.7)$$

由上式可分别算出李代数 G_2 不可约表示 $\{a_1,a_2\}=\{0,1\}$ 和 $\{0,2\}$ 的维数分别为 7 维和 27 维，再由(7.2.13)式分别求得其最高权为

$$\vec{\Lambda}^{(7)}=\vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}) \qquad (7.3.8)$$

$$\vec{\Lambda}^{(27)}=2\vec{\alpha}_1+4\vec{\alpha}_2=(\sqrt{3},1)$$

利用(7.3.5)式，这时两个不等式可写为

$$\Lambda_1^{(\lambda)}=\frac{3}{2}\sqrt{3}-r_1\frac{\sqrt{3}}{2}\geqslant 0$$
$$\Lambda_2^{(\lambda)}=\frac{3}{2}+r_1\frac{3}{2}-r_2\geqslant 0 \qquad (7.3.9)$$

表 7.3

$D^{(\lambda)}$	r_1, r_2	$\Lambda_1^{(\lambda)}, \Lambda_2^{(\lambda)}$	$a_1^{(\lambda)}, a_2^{(\lambda)}$	$N^{(\lambda)}$
$D^{(77)}$	0,0	$\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}$	0,3	77
$D^{(64)}$	0,1	$\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}$	1,1	64
$D^{(27)}$	1,2	$\sqrt{3},1$	0,2	27
$D^{(14)}$	1,3	$\sqrt{3},0$	1,0	14
$D^{(7)}$	2,4	$\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}$	0,1	7
$D^{(1)}$	3,6	0,0	0,0	1

由(7.3.9)式不难求得以下可能的18组解：

$$\begin{cases} r_1=0,0,1,1,1,1,2,2,2,2,2,3,3,3,3,3,3,3 \\ r_2=0,1,0,1,2,3,0,1,2,3,4,0,1,2,3,4,5,6 \end{cases}$$

但只有以下六组解$(r_1,r_2)=(0,0),(0,1),(1,2),(1,3),(2,4)$和$(3,6)$对应的最高权才能满足$a_1$和$a_2$为非负整数,它们相应的不可约表示如表7.3所示。

由于$7\times27=77+64+27+14+7$,故G_2这两个不可约表示的直积约化为

$$D^{(7)}\otimes D^{(27)}=D^{(77)}\oplus D^{(64)}\oplus D^{(27)}\oplus D^{(14)}\oplus D^{(7)}$$

§7.4 夸克模型和强子波函数

实验上已发现数百种"基本粒子",夸克模型认为通过强作用而形成的各种重子和介子都是由"夸克"组成的,故称它们为强子。目前实验上已证明有6种不同所谓"味"的夸克存在,分别记作u(上),d(下),s(奇),c(粲),b(底)和t(顶)夸克,每个重子数为$\frac{1}{3}$的夸克都有相应的反夸克存在,其重子数为$-\frac{1}{3}$。除电荷Q和同位旋T第三分量T_3这两个熟知的相加量子数外,还有奇异数S,粲数C,底数B,顶数T和超荷Y(重子数和奇异数之和)等相加量子数,表7.4列出了这六种夸克相应的这些量子数值。

夸克模型认为,重子是由三个夸克组成,而介子是由夸克和反夸克构成的。这些强子通过夸克间的规范场(胶子场)传递强作用,在忽略中强作用引起的夸克质量差别外,实验上观察到的这些强子具有明显的幺正对称性,它们应是幺正李代数(李群)的不同表示,该模型不仅对强子分类取得很大成功,而且对发展量子色动力学,探索强作用机制及推动超对称研究等方面都取得了令人瞩目的成就。以下将在夸克模型基础上讨论$su(3)$和$su(4)$李

代数的权图，并给出每个权对应强子的夸克波函数。

表 7.4　　　　六种夸克的相加量子数

	d	u	s	c	b	t
Q	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
T_3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
S	0	0	-1	0	0	0
C	0	0	0	1	0	0
B	0	0	0	0	-1	0
T	0	0	0	0	0	1
Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

4—1　强子的 $su(3)$ 夸克波函数的权图

低能重子是由 u，d，s 这三种味道的轻夸克所构成，它们形成 $su(3)$ 李代数的 3 维基础表示 $q_i(q_1=u,q_2=d,q_3=s)$。已知 $su(3)$ 是秩为 2 的李代数，为实际应用方便起见，可取其嘉当子空间为同位旋第三分量 $T_3=H_1$ 和超荷 $Y=\frac{2}{\sqrt{3}}H_2$，这时 $su(3)$ 两个基础表示的权图 7.5 将变为图 7.8，相应的权矢量分别对应着 u，d，s 三种夸克和 $\bar{u}$，$\bar{d}$ 和 $\bar{s}$ 三种反夸克，这两个表示对应的杨图分别为□和 $\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}$ 。

既然重子是由 3 个夸克组成的，它们相应于 $su(3)$ 的 3 阶张量表示，由于

$$\square\otimes\square\otimes\square=\begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & \ \\ \hline\end{array}\oplus\begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \ \\ \cline{1-1}\end{array}\oplus\begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \ \\ \cline{1-1}\end{array}\oplus\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}$$

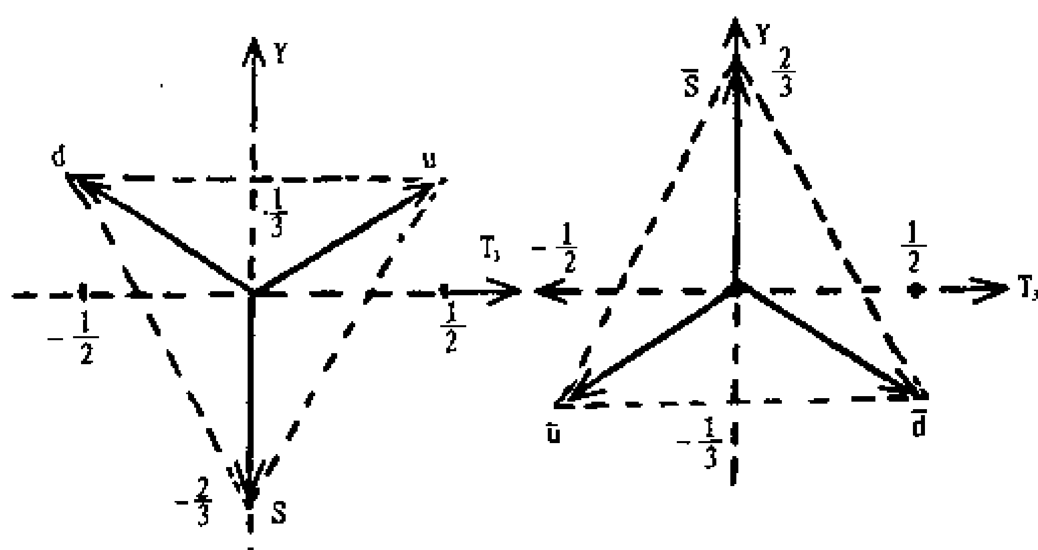


图 7.8　夸克和反夸克的 A_2 权图

而夸克模型认为重子只能是 $su(3)$ 的 3 阶完全对称张量 10 维表示和 3 阶混合对称张量的 8 维表示(这里只取　　　　对称型混合张量),其杨氏对称化算子分别为 $y^{[3]}$ 和 $y^{[2,1]}$,其中

$$y^{[3]}=e+(12)+(13)+(23)+(123)+(321)$$

$$y^{[2,1]}=e-(13)+(12)-(123)$$

实验上发现的 $J^P=\frac{3}{2}^+$ 的 10 个重子恰好属于 $su(3)$ 的 10 维表示,其相应的标准盘及被指定的重子分别为

$\Delta^{++}\sim$ [u|u|u],$\Delta^{+}\sim$ [u|u|d],$\Delta^{0}\sim$ [u|d|d]

$\Delta^{-}\sim$ [d|d|d],$\Sigma^{+*}\sim$ [u|u|s],$\Sigma^{0*}\sim$ [u|d|s]

$\Sigma^{-*}\sim$ [d|d|s],$\Xi^{0*}\sim$ [u|s|s],$\Xi^{-*}\sim$ [d|s|s]

$\Omega^{-}\sim$ [s|s|s]

当杨氏算子 $y^{[3]}$ 作用在标准盘给出的夸克排列次序上,再考虑到归一化,立即可得到每个重子的夸克波函数,由于 3 个夸克的量子数 T_3 和 Y 的相加性,不难求出每个重子相应的权,其权图如图 7.9(a)所示,以下仅写出有代表性的二个重子的夸克波函数作

为例子。

$$\Delta^{+} \sim y^{[3]}(\mathrm{uud}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathrm{uud}+\mathrm{udu}+\mathrm{duu})$$

$$\Sigma^{0*} \sim y^{[3]}(\mathrm{uds}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathrm{uds}+\mathrm{dus}+\mathrm{sdu}+\mathrm{usd}+\mathrm{dsu}+\mathrm{sud}) \tag{7.4.1}$$

实验上最常见到的质子(P)和中子(n)等 $J^{P}=\frac{1}{2}^{+}$ 的 8 个重子属于 $su(3)$的 8 维表示，其相应的标准盘及被指定的重子分别为

$$\mathrm{P}\sim \begin{array}{|c|c|}\hline \mathrm{u} & \mathrm{u} \\ \hline \mathrm{d} \\ \cline{1-1}\end{array}\ ,\quad \mathrm{n}\sim \begin{array}{|c|c|}\hline \mathrm{u} & \mathrm{d} \\ \hline \mathrm{d} \\ \cline{1-1}\end{array}\ ,\quad \Sigma^{+}\sim \begin{array}{|c|c|}\hline \mathrm{u} & \mathrm{u} \\ \hline \mathrm{s} \\ \cline{1-1}\end{array}\ ,$$

$$\Sigma^{-}\sim \begin{array}{|c|c|}\hline \mathrm{d} & \mathrm{d} \\ \hline \mathrm{s} \\ \cline{1-1}\end{array}\ ,\quad \Xi^{0}\sim \begin{array}{|c|c|}\hline \mathrm{u} & \mathrm{s} \\ \hline \mathrm{s} \\ \cline{1-1}\end{array}\ ,\quad \Xi^{-}\sim \begin{array}{|c|c|}\hline \mathrm{d} & \mathrm{s} \\ \hline \mathrm{s} \\ \cline{1-1}\end{array}\ ,$$

而 2 重权的两个标准盘 $\begin{array}{|c|c|}\hline \mathrm{u} & \mathrm{d} \\ \hline \mathrm{s} \\ \cline{1-1}\end{array}$ 和 $\begin{array}{|c|c|}\hline \mathrm{u} & \mathrm{s} \\ \hline \mathrm{d} \\ \cline{1-1}\end{array}$ 将对应重子 Σ^{0}和 Λ^{0}，前面的 6 个单重权对应的重子夸克波函数很容易写为

$$\mathrm{P}\sim y^{[2,1]}(\mathrm{uud}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathrm{uud}-\mathrm{udu}-\mathrm{duu})$$

$$\mathrm{n}\sim y^{[2,1]}(\mathrm{udd}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathrm{udd}+\mathrm{dud}-2\mathrm{ddu})$$

$$\Sigma^{+}\sim y^{[2,1]}(\mathrm{uus}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathrm{uud}-\mathrm{usu}-\mathrm{suu}) \tag{7.4.2a}$$

$$\Sigma^{-}\sim y^{[2,1]}(\mathrm{dds}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathrm{dds}-\mathrm{dsd}-\mathrm{sdd})$$

$$\Xi^{0}\sim y^{[2,1]}(\mathrm{uss}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathrm{uss}+\mathrm{sus}-2\mathrm{ssu})$$

$$\Xi^{-}\sim y^{[2,1]}(\mathrm{dss}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathrm{dss}+\mathrm{sds}-2\mathrm{ssd})$$

由于 2 重权代表具有相同量子数(Y,T_3)的两个不同粒子，其夸克波函数必须正交，而这两个标准盘相应的夸克波函数并不正交，它们分别为

$$\varphi_1 \sim y^{[2,1]}(\mathrm{uds}) = \frac{1}{2}(\mathrm{uds} - \mathrm{sdu} + \mathrm{dus} - \mathrm{dsu})$$

$$\varphi_2 \sim y^{[2,1]}(\mathrm{usd}) = \frac{1}{2}(\mathrm{usd} - \mathrm{dsu} + \mathrm{sud} - \mathrm{sdu}) \qquad (7.2.2\mathrm{b})$$

若取 φ_2 代表重子 Λ^0，则代表重子 Σ^0的夸克波函数应为 $\varphi = \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2$，并满足$\langle\varphi_2|\varphi\rangle = 0$，再考虑到波函数的归一化条件，则不难求得 Σ^0的夸克波函数为

$$\Sigma^0 = \frac{1}{\sqrt{12}}(\mathrm{sdu} + \mathrm{dsu} + \mathrm{usd} + \mathrm{sud} - 2\mathrm{uds} - 2\mathrm{dus})$$

(7.4.2c)

当然，我们也可选取第二套杨氏对称化算子 $y^{[2,1]} = e - (12) + (13) - (132)$，并将置换算符视为对夸克编号作用，然后再按夸克编号次序排列。如 $y_2^{[2,1]}(\mathrm{u}(1)\mathrm{d}(2)\mathrm{u}(3)) = \mathrm{u}(1)\mathrm{d}(2)\mathrm{u}(3) - \mathrm{u}(2)\mathrm{d}(1)\mathrm{u}(3) + \mathrm{u}(3)\mathrm{d}(2)\mathrm{u}(1) - \mathrm{u}(3)\mathrm{d}(1)\mathrm{u}(2) = \mathrm{u}(1)\mathrm{d}(2)\mathrm{u}(3) - \mathrm{d}(1)\mathrm{u}(2)\mathrm{u}(3) + \mathrm{u}(1)\mathrm{d}(2)\mathrm{u}(3) - \mathrm{d}(1)\mathrm{u}(2)\mathrm{u}(3) \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{u}(1)\mathrm{d}(2)\mathrm{u}(3) - \mathrm{d}(1)\mathrm{u}(2)\mathrm{u}(3)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{udu} - \mathrm{duu})$。

则 8 个 $J^P = \frac{1}{2}^+$ 的重子夸克波函数又可写为

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P} \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{udu} - \mathrm{duu}) \\
&\mathrm{n} \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{udd} - \mathrm{dud}) \\
&\Sigma^+ \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{usu} - \mathrm{suu}) \\
&\Sigma^- \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{dsd} - \mathrm{sdd}) \qquad (7.4.3) \\
&\Xi^0 \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{uss} - \mathrm{sus}) \\
&\Xi^- \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{dss} - \mathrm{sds})
\end{aligned}$$

$$\Sigma^{0} \sim \frac{1}{2}(usd - sud + dsu - sdu)$$

$$\Lambda^{0} \sim \frac{1}{\sqrt{12}}(2uds - 2dus + usd + sdu - dsu - sud)$$

以上列出的二套重子 8 维表示的夸克波函数在文献中都可碰到，但其组分夸克成分不会改变，至于选择哪套是随意的，其权图如图 7.9(b)所示。

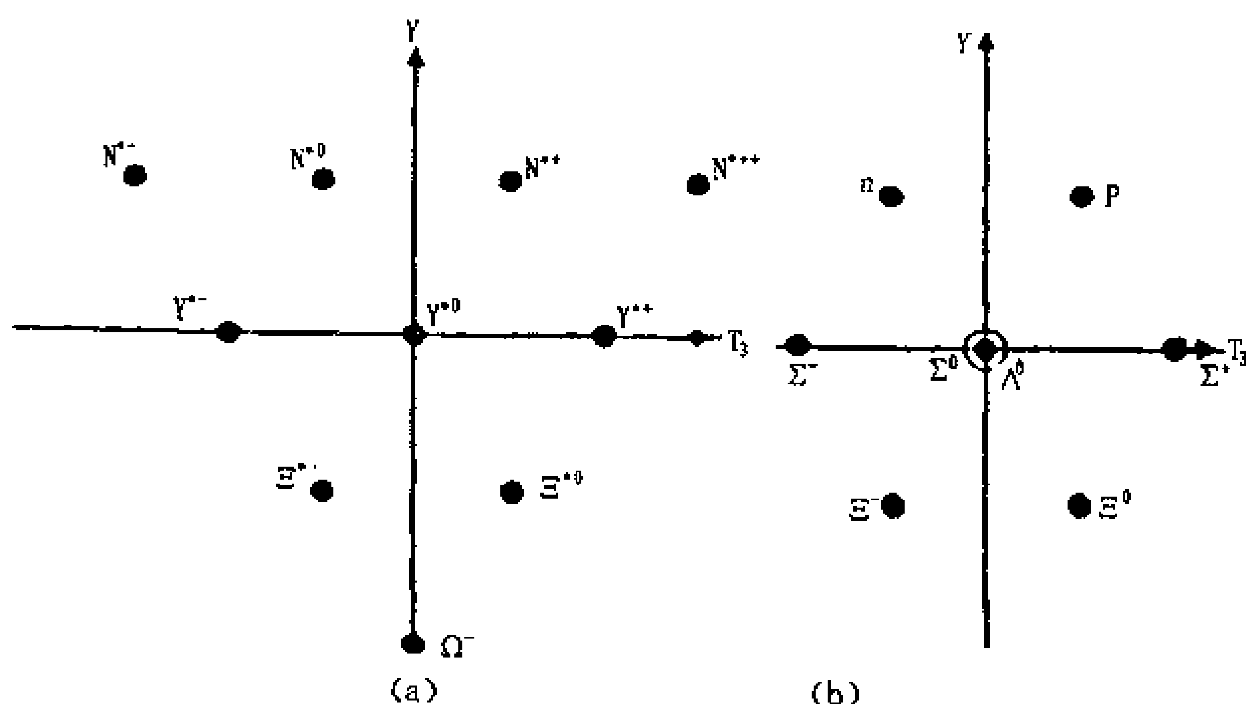


图 7.9　低能重子的 su(3)10 维和 8 维表示权图

夸克模型还认为介子是由夸克 q_i 和反夸克 $\bar{q}^i$ 构成的，由反夸克对应的 $su(3)$ 基础表示权图 7.8 可看出，$\bar{q}^i = \epsilon^{ijk} q_j q_k$，$(i, j, k = 1, 2, 3)$，即 3 种反夸克的杨盘分别为 $\begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline\end{array} \longrightarrow \bar{q}^1 = \bar{u}$，$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline\end{array} \longrightarrow \bar{q}^2 = \bar{d}$，$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array} \longrightarrow \bar{q}^3 = \bar{s}$，故夸克和反夸克所属的两个基础表示的直积约化可以下式杨图来表示。

$$\bar{q}^i q_j \sim ▨ \otimes \square = \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline\end{array} \otimes \square = \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \\ \cline{1-1}\end{array} \oplus \square .$$

其中 8 维表示可视为 $su(3)$2 阶零迹混合张量表示，即满足 $\sum_{i=1}^{3}\bar{q}^i q_i=0$。这样独立分量只有 8 个，可分别对应着常见的 $J^P=O^-$的 8 个赝标介子，其相应关系为

$$K^+\sim\bar{s}u\rightarrow\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array},\quad K^0\sim\bar{s}d\rightarrow\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array},\quad \bar{K}^0\sim\bar{d}s\rightarrow\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$$

$$\pi^+\sim\bar{d}u\rightarrow\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array},\quad \pi^-\sim\bar{u}d\rightarrow\begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array},\quad K^-\sim\bar{u}s\rightarrow\begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$$

而 2 重权对应的标准盘有两个，

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\rightarrow\bar{d}d,\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\rightarrow\bar{s}s$$

显然 $\bar{d}d$ 和 $\bar{s}s$ 夸克态具有 $\bar{u}u$ 相同的权，但从介子 π^+和 π^-所包含的夸克成分不难看出，π^0 介子夸克波函数的最佳选择应为

$$\pi^0=\frac{1}{\sqrt{2}}(u\,\bar{u}-d\,\bar{d})$$

为了满足 2 阶混合阶量的零迹条件和介子 η 和其它 O^- 介子夸克波函数的正交条件，故 η 夸克波函数应为

$$\eta=\frac{1}{\sqrt{6}}(u\,\bar{u}+d\,\bar{d}-2s\,\bar{s})$$

这样 8 个赝标介子的夸克波函数可写为(7.4.4)式的零迹 3 阶矩阵形式，其权图如图 7.10(a)所示。

$$M_i^j=\begin{pmatrix}\frac{\pi^0}{\sqrt{2}}+\frac{\eta}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+\\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}}+\frac{\eta}{\sqrt{6}} & K^0\\ K^- & \bar{K}^0 & \frac{-2\eta}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\quad (i,j=1,2,3)\tag{7.4.4}$$

由于每个夸克的自旋 $J=\frac{1}{2}$，故夸克和反夸克也可构成总自旋为 $J^P=1^-$的矢量介子，两个自旋向上的夸克和反夸克 $\bar{q}_i\uparrow q^j\uparrow$

将约化为 $J^P=1^-$ 的 8 维表示和 1 维表示，这恰好对应着实际上发现的 9 个矢量介子，其权图如图 7.10(b)所示。

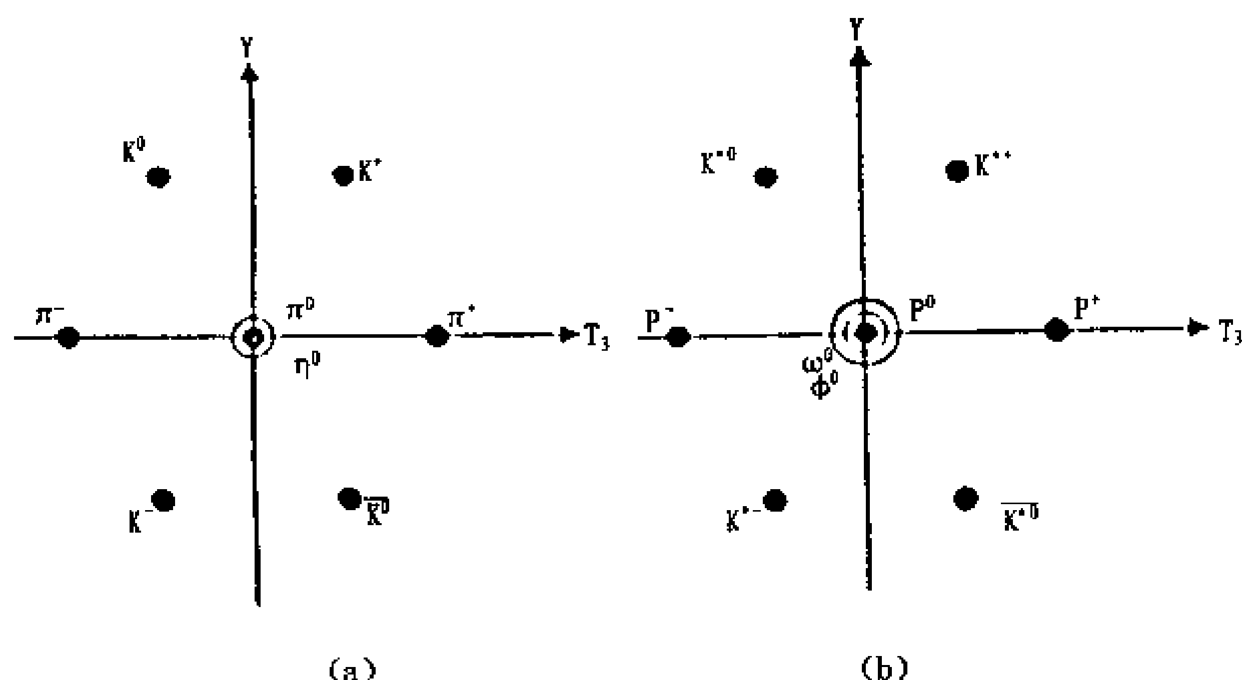


图 7.10　0^-介子 8 维 1^-介子(8+1)维 $su(3)$表示权图

仿照(7.4.4)式，$J^P=\frac{1}{2}^+$ 的 8 个重子也可写为矩阵形式，它们属于 $su(3)$的 8 维混合张量表示，

$$B^i_j=\begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}}+\frac{\Lambda^0}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & P \\ \Sigma^- & \frac{-\Sigma^0}{\sqrt{2}}+\frac{\Lambda^0}{\sqrt{6}} & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & \frac{-2\Lambda^0}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \tag{7.4.5}$$

这种矩阵形式对于研讨 $su(3)$不变量是很方便的。

4—2　$su(n)$李代数不可约表示权图的一般讨论

从以上讨论不难看出，若把超荷视为权矢量第一分量，则除了恒等表示外，李代数 $su(3)$不可约表示的权图只有三种类型：

(1)配分$[\lambda]$对应的单行杨图，其权图是倒置的正三角型，该类表示的最高权对应的标准盘是每个方格都填 u 夸克，因此最高权为

$$Y=\frac{\lambda}{3},T_3=\frac{\lambda}{2}$$

(2)配分为$[\lambda_1,\lambda_2]=[2\lambda_2,\lambda_2]$的双行杨图，其权图为正六边形，最外层为单重权，向内其权重数逐圈增加，最高权对应的标准盘为第一行全填 u 夸克，第二行全填 d 夸克，故最高权为

$$Y=\lambda_2,T_3=\frac{\lambda_2}{2}$$

(3)配分$[\lambda_1,\lambda_2]$对应的一般双行杨图，其权图为六边纺锤形，最外层为单重权，向内其权重数逐层增加，直至内圈同重数权构成正三角形，再向内去其权重数不再增加，其最高权对应的标准盘仍是第一行全填 u，第二行全填 d，故最高权为

$$Y=(\lambda_1+\lambda_2)/3,\quad T_3=(\lambda_1-\lambda_2)/2$$

虽然上面只讨论了 $su(3)$李代数不可约表示的权图，但不难将这种方法推广到更高的 $su(n)(n\geqslant3)$李代数。随着实验能量的增高，还发现了不少含粲夸克的强子，这时强子分类将具有 $su(4)$对称性，它是个秩 $l=3$ 的李代数，其权空间是 3 维的，除超荷和同位旋第三分量外，还多一个标征粲数 C 的分量，然而重子依然由 3 个夸克构成，而介子由夸克和反夸克组成，当无粲夸克参于时($C=0$)平面内)，其权图就是上述之结果；当强子包含一个粲夸克时($C=1$ 平面内)，必有类同的 $su(3)$不可约表示权图；而当强子包含二个粲夸克时($C=2$ 平面内)，同样有 $su(3)$的 2 维权图，图7.11分别给出了更高能产生的强子 $su(4)$的 20 维不可约表示的权图对

应的各种重子，这些强子在高能实验中大都被观测到，这从一个方面说明了夸克模型对粒子分类的突出成就。

当然这种权图作法也可扩充到 u,d,s,c,b 五种夸克对应的 $su(5)$ 夸克模型和包含 t 夸克的 $su(6)$ 夸点模型，但实验上至今发现的含 b 夸克的重子只有一二个，其权矢量分别为 4 维和 5 维，只能在不同底数和顶数的平面或 3 维空间内作图。每个强子的夸克波函数也可类似由标准盘通过对称化给出。

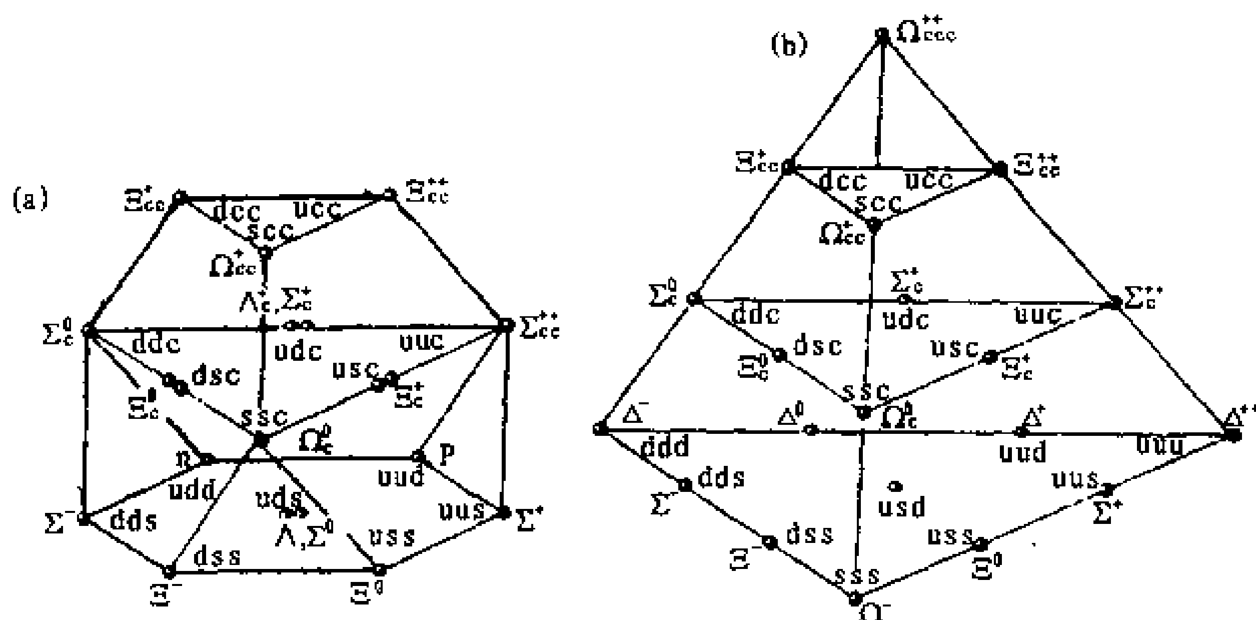
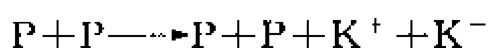


图 7.11 u,d,s 和 c 夸克组成的 $su(4)$ 重子多重态
(a)含重子 8 重态的 $su(4)$20 维表示权图；
(b)含重子 10 重子态的 $su(4)$20 维表示权图

§7.5 盖尔曼-欧丘巴 (Gell-Mann,Okubo)质量关系

在强作用中，除同位旋和重子数守恒外，还引入另一个守恒量 S-奇异数，因为实验上发现有些粒子性质奇特，而称它们为奇异数 S 不为零的奇异粒子，最轻的奇异粒子是 K 介子，K 介子(K^+，

K^0)是 $S=1$ 的同位旋二重态，其反粒子 $\bar{K}$($\bar{K}^0$,K^-)为 $S=-1$ 的同位旋二重态，由于强作用必须奇异数守恒，故奇异粒子必须成对产生。例如，当两个质子碰撞时可能产生 K 介子，其反应为



$$P+P\longrightarrow P+P+K^{+}+K^{-}$$

实验上也发现不少奇异重子，如 $S=-1$ 的同位旋三重态 Σ^+，Σ^0 和 Σ^- 及同位旋单态 Λ^0；$S=-2$ 的同位旋二重态重子 Ξ^0 和 Ξ^-，这些常见的介子和重子皆可视为 $su(3)$的 8 维表示的成员，其权图分别为图 7.10(a)和图 7.9(b)所示，在 πP 散射实验中，随着能量增加，还会产生 $su(3)$的 10 维表示相应的重子，其权图如图 7.9(a)所示：$S=-1$ 的同位旋三重态为 $\Sigma^{*+}(Y^{+*})$，$\Sigma^{*0}(Y^{0*})$和 $\Sigma^{*-}(Y^{-*})$，而 $S=-2$ 的同位旋二重态为 Ξ^{0*} 和 Ξ^{-*}，理论上预言的 $S=-3$的 Ω^-不久也被实验发现了。

如果构成这些粒子的强作用是 $su(3)$完全对称的，若略去电磁作用和弱作用可能引起的微小质量差异，则在同一个多重态中的所有粒子应该具有相同的质量。然而，实验上发现这些粒子的质量相差相当大，如质子质量 $m_p=938$MeV，而重子 Σ 的质量 $m_\Sigma=1190$MeV，Ξ 粒子质量为 $m_\Xi=1320$MeV，$m_\Xi/m_p\simeq1.5$，为了解释它们既具有$su(3)$对称性又存在相当大的质量差异的客观现象，人们假设强作用哈密顿 H 可分为 H_0 和 H'两个部分，其中 H_0 称之超强相互作用，它是$su(3)$完全对称的，决定了这些强子的$su(3)$对称分类；而 H' 称之中强相互作用，它将引起同一个$su(3)$表示中的强子质量分裂。

物理上常常选取 8 个线性独立的 3 维厄米零迹矩阵 λ_i ($i=1,2,\cdots,8$)作为$su(3)$李代数的基，通常称 λ_i 为盖尔曼矩阵，其具体形式为

$$\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\lambda_2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix},\lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \quad (7.5.1)$$

$$\lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

这时 $su(3)$的代数结构将由 8 个生成元 $T_i=\frac{1}{2}\lambda_i$ 的矩阵对易关系来确定，显然可取 $T_3=\frac{1}{2}\lambda_3$ 和 $Y=\frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8$ 分别相应于同位旋第三分量和超荷，以 T_3 和 Y 为 $su(3)$的嘉当子空间中，其权矢量正好对应着强子，由于 H_0 是 $su(3)$完全对称的，故 H_0 应与它的 8 个生成元都对易；而中强相互作用 H' 不影响权矢量的分布，它应与嘉当子空间的 Y 和 T_3 对易，其最简单选择应与 $T_8(Y)$成比例。

如果质子是静止的单粒子态 $|\mathrm{P}\rangle$，则其质量应为

$$\langle \mathrm{P}|H|\mathrm{P}\rangle=\langle \mathrm{P}|H_0|\mathrm{P}\rangle+\langle \mathrm{P}|H'|\mathrm{P}\rangle \quad (7.5.2)$$

由于 H_0 是 $su(3)$对称哈密顿量，故上式第一项对多重态的每个强子贡献同样质量 m_0，而 H' 正比于生成元 T_8，由于 $J^P=\frac{1}{2}^+$ 的 8 个重子属于 $su(3)$8 维混合张量表示，由(7.4.5)式给出。如同第四章求选择定则一样，要使矩阵元 $\langle B|H'|B\rangle$ 是个不变量，其张量指标都要收缩掉，而确保其为 $su(3)$1 维恒等表示，只有两种收缩方式可保证该矩阵元是不变量，即

$$\bar{B}^i_j B^j_k (T_8)^k_i=\mathrm{Tr}(B^+BT_8) \quad (7.5.3)$$

$$\bar{B}^i_j (T_8)^j_k B^k_i=\mathrm{Tr}(B^+T_8B)$$

将(7.4.5)式给出的混合张量形式 B 和 B^+ 及(7.5.1)式给出的 $T_8=\frac{1}{2}\lambda_8$ 矩阵代入(7.5.3)式，则得

$$\langle \mathrm{B}|H'|\mathrm{B}\rangle=x\mathrm{Tr}(B^+BT_8)+y\mathrm{Tr}(B^+T_8B)$$

$$
\begin{aligned}
&= x(\Sigma^{+2}+\Sigma^{0^2}+\Sigma^{-2}+\Xi^{0^2}+\Xi^{-2}-2P^2-2n^2\\
&-\Lambda^2)/12+y(\Sigma^{+2}+\Sigma^{0^2}+\Sigma^{-2}+P^2+n^2-\\
&\Lambda^2\\
&-2\Xi^{0^2}-2\Xi^{-2})/12 \qquad (7.5.4)
\end{aligned}
$$

其中 x 和 y 为与 $su(3)$ 无关的比例常数，在忽略同位旋多重态的质量差后，由上式不难得到四类重子的质量为：

$$
\begin{aligned}
m_N &= \langle N|H|N\rangle = m_0-2x+y\\
m_\Sigma &= \langle \Sigma|H|\Sigma\rangle = m_0+x+y \qquad (7.5.5)\\
m_\Xi &= \langle \Xi|H|\Xi\rangle = m_0+x-2y\\
m_\Lambda &= \langle \Lambda|H|\Lambda\rangle = m_0-x-y
\end{aligned}
$$

虽然从对称性关系并不晓得参数 m_0，x 和 y 的具体数值，但由(7.5.5)式立即得到关系式

$$2(m_N+m_\Xi)=3m_\Lambda+m_\Sigma \qquad (7.5.6)$$

将实验值 $m_N=940\text{MeV}$，$m_\Lambda=1115\text{MeV}$，$m_\Sigma=1190\text{MeV}$，和 $m_\Xi=1320\text{MeV}$ 代入上式，其误差仅为 3%，这就是著名的盖尔曼-欧丘巴质量关系。

对于 $su(3)$10 重态中的重子质量，同样也可讨论矩阵元为

$\langle 10|H|10\rangle=\langle 10|H_0|10\rangle+\langle 10|H'|10\rangle=m_0+\langle 10|H'|10\rangle$，由于 $H'\propto T_8$ 是属于 $su(3)$8 维混合张量表示(1,1)，按照群的基本原理可知，$\langle 10|H'|10\rangle$ 是否包含不变量取决于 $su(3)$8 维表示(1,1)与 10 维表示(3,0)的直积表示是否包含未态 10 维表示，因为

$(1,1)\otimes(3,0)=(4,1)\oplus(2,2)\oplus(3,0)+(1,1)$ 上式表明其直积表示只包含唯一的 10 维表示，故矩阵元 $\langle 10|H'|10\rangle$ 只有一项对质量有贡献，又因 $H'\propto T_8\propto Y$，因此可期待每个重子质量写为

$$m=m_0+aY\ (a\ 为常数)$$

这样 10 重态重子的质量关系为

$$m_{\Sigma^*}-m_{\Delta}=m_{\Xi^*}-m_{\Sigma^*}=m_{\Omega^-}-m_{\Xi^*} \tag{7.5.7}$$

将实验值 $m_{\Delta}=1230\text{MeV}$，$m_{\Sigma^*}=1385\text{MeV}$，$m_{\Xi^*}=1530\text{MeV}$，代入上式基本符合，由此可予言 $m_{\Omega^-}=1680\text{MeV}$，不久实验上就发现了 Ω^- 粒子质量为 1672MeV，从而使人们更坚信 su(3)对称性的夸克模型正确性。

§7.6 $su(6)$夸克模型和重子磁矩

上节已讨论过自旋为$\frac{1}{2}$重子的 $su(3)$8 重态和自旋为$\frac{3}{2}$重子的 $su(3)$10 重态，不难看出这些重子的质量和许多内禀性质差别并不大，人们猜想可能存在更高对称性，从而使这两组重子属于更高对称群的同一个不可约表示的不同权的粒子，由于该表示所包含的重子具有不同自旋，故这个对称群的生成元不应与描述自旋对称性的 $su(2)$生成元皆对易，这暗示着存在内部对称性和时空对称性的混合，因此这种包含自旋对称性的理论是非相对论的。按着 $su(3)$夸克模型，这些重子都是由 u，d，s 三种夸克构成的，而每种夸克又有自旋为$+\frac{1}{2}$和$-\frac{1}{2}$两种状态，故有六种夸克态可分别以$|u\uparrow\rangle$，$|u\downarrow\rangle$，$|d\uparrow\rangle$，$|d\downarrow\rangle$，$|s\uparrow\rangle$和$|s\downarrow\rangle$代表，它们构成了 $su(6)$对称的矢量表示，此李代数共有 35 个生成元，不难设想，当不考虑重子自旋时，它们应具有 $su(3)$对称性，即存在 8 个 $su(3)$生成元$\frac{1}{2}\lambda_i\otimes I_{2\times2}(i=1,2,\cdots,8)$，这里 $I_{2\times2}$是 2 维单位矩阵；而当不考虑 $su(3)$对称时，这两组重子自旋分别为$\frac{1}{2}$和$\frac{3}{2}$，相应于 $su(2)$自旋对称性，故又包含三个 $su(2)$生成元$\frac{1}{2}\sigma_a\otimes I_{3\times3}(a=1,2,3)$，这里 $I_{3\times3}$是 3 维单位矩阵，也就是说这个 $su(6)$对称性应包含着一个 $su(3)$子代数和一个 $su(2)$子代数，但它们都不是 $su(6)$的

不变子代数。$su(6)$的其余 24 个生成元可选为

$$\frac{1}{2}\lambda_i \otimes \sigma_a \quad (a=1,2,3;i=1,2,\cdots,8) \tag{7.6.1}$$

不难想象自旋为$\frac{1}{2}$的 8 个重子和自旋为$\frac{3}{2}$的 10 个重子将构成一个 56 维多重态，显然它们属于 $su(6)$的完全对称三阶张量表示，若以其子代数 $su(3)\oplus su(2)$来分析，这个 $su(6)$三阶完全对称张量表示一种可能是由这两个子代数同时为完全对称三阶张量的直积表示所构成，这时重子自旋为$\frac{3}{2}$，它们分别属于 $su(3)$的 10 维表示和 $su(2)$的 4 维表示，以(10,4)代表；另一种可能性是这个 $su(6)$三阶完全对称张量也可由 $su(3)$和 $su(2)$的同型混合三阶张量直积表示来构成，它描述重子自旋为$\frac{1}{2}$，这分别相应于 $su(3)$的 8 维表示和 $su(2)$的 2 维表示，以(8,2)代表。因此三个自旋为$\frac{1}{2}$的夸克将构成重子属于 $su(6)$的 56 维表示，若以其子代数 $su(3)\oplus su(2)$相应不可约表示来分析，则可将这种约化关系写为

$$\{(3,2)\otimes(3,2)\otimes(3,2)\}_{\text{对称化}}=(10,4)\oplus(8,2) \tag{7.6.2}$$

为了以 $su(6)$夸克模型做某些具体计算，首先必须给出这些重子的 $su(6)$夸克波函数，由于自旋为$\frac{3}{2}$的 10 种重子同时属于 $su(3)$和 $su(2)$的三阶完全对称张量表示，利用前面介绍过的标准盘和杨氏对称化算子法，不难给出这些重子的夸克波函数。例如，对于某些代表性的不同自旋投影的夸克波函数可写为

$$|\Delta^{++},S_z=\frac{3}{2}\rangle=|uuu\rangle|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$$

$$|\Delta^{++},S_z=-\frac{3}{2}\rangle=|uuu\rangle|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle$$

$$|\Delta^{+},S_z=\frac{3}{2}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}\{|uud+|udu\rangle+|duu\rangle\}|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$$

(7.6.3)

$$|\Delta^{+}, S_z=\frac{1}{2}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}\{|uud\rangle+|udu\rangle+|duu\rangle\}$$
$$\{|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle+|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle+|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle\}$$

$$|\Sigma^{*+}, S_z=\frac{1}{2}\rangle=\frac{1}{3\sqrt{2}}\{|uds\rangle+|dus\rangle+|sdu\rangle$$
$$+|usd\rangle+|dsu\rangle+|sud\rangle\}\{|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle$$
$$+|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle+|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle\}\cdots\cdots$$

然而对于同属于 $su(3)$ 和 $su(2)$ 的三阶混合对称张量表示的自旋为 $\frac{1}{2}$ 的 8 个重子，其总夸克波函数也必须是完全对称的，因此 $su(3)$ 部分的波函数中一对反对称指标，必须相应于 $su(2)$ 部分的同样反对称性，利用前述的写夸克波函数技巧，不难写出这 8 种重子的夸克波函数。例如，对于超子 Λ，可给出其夸克波函数为

$$|\Lambda, S_z=\frac{1}{2}\rangle=\frac{1}{2\sqrt{3}}\{(|uds\rangle-|dus\rangle)(|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle$$
$$-|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle)+(|sud\rangle-|sdu\rangle)(|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle$$
$$-|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle)+(|dsu\rangle-|usd\rangle)(|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle$$
$$-|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle)\} \tag{7.6.4}$$

当然若以 $su(3)$ 每对指标的对称态乘 $su(2)$ 的总自旋投影为 $\frac{1}{2}$ 的同样一对指标的对称态也可得到完全对称的 $su(6)$ 夸克波函数，例如质子和中子的夸克波函数可分别为

$$|P, S_z=\frac{1}{2}\rangle=\frac{1}{3\sqrt{2}}\{|uud\rangle(2|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle-|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle$$
$$-|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle)+|udu\rangle(2|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle-|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle$$
$$-|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle)+|duu\rangle(2|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle-|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle$$
$$-|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle)\} \tag{7.6.5}$$

$$|n, S_z=\frac{1}{2}\rangle=\frac{1}{3\sqrt{2}}\{|ddu\rangle(2|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle-|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle$$
$$-|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle)+|dud\rangle(2|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle-|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle$$
$$-|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle)+|udd\rangle(2|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle-|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle$$

$$-|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle)\} \qquad (7.6.6)$$

利用这些夸克波函数，可计算各种重子的磁矩，设每个夸克都是类似电子的点粒子，其质量为 m，则夸克的磁矩为

$$\frac{1}{2m}Q\vec{\sigma} \qquad (7.5.7)$$

可见夸克磁矩这个算符的变换性质类似于 $su(6)$ 的 35 个生成元之一，即该算符属于 $su(6)$ 的 35 维伴随表示，类似前节重子质量的讨论，要求属于 $su(6)$ 的 56 维表示的重子磁矩，我们仅对矩阵元 $\langle 56|35|56\rangle$ 存在的不变量感兴趣，由于直积表示 $35\otimes56$ 只包含一个 56 维表示，因此该矩阵元仅存在一项不变量，即该矩阵元只决定于单一参数 μ，而 μ 应正比于生成元 $Q\vec{\sigma}$ 的矩阵元。

$$\langle 56|Q\vec{\sigma}|56\rangle \qquad (7.6.8)$$

将上述的质子和中子的夸克波函数代入(7.5.8)式，立即可求出它们的磁矩比，因为质子和中子都是算符 σ_3 的本征态，故可计算算符 $Q\sigma_3$ 的期待值，其它分量为零，因此有

$$Q\sigma_3|P,S_Z=\frac{1}{2}\rangle=\frac{1}{3\sqrt{2}}\{\frac{2}{3}|uud\rangle(2|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle-|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle+|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle)+\frac{2}{3}|uud\rangle(2|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle+|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle-|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle)-\frac{1}{3}|uud\rangle(-2|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle-|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle-|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle)+\text{循环项}\}$$

$$\mu_P=\langle P,\frac{1}{2}|Q\sigma_3|P,\frac{1}{2}\rangle=\mu$$

$$\mu_n=\langle n,\frac{1}{2}|Q\sigma_3|n,\frac{1}{2}\rangle=-\frac{2}{3}\mu \qquad (7.6.9)$$

因此质子和中子的磁矩比为

$$\mu_P/\mu_n=-\frac{3}{2} \qquad (7.6.10)$$

以核子磁矩为单位，实验上测得 $\mu_p=2.79$，$\mu_n=-1.91$，故有

$$(\mu_p/\mu_n)_{实}=-1.46 \tag{7.6.11}$$

可见其实验结果与 $su(6)$ 夸克模型予言的理论结果基本一致，我们还可进一步推广这个结论，认为重子是处在静止状态下的三个夸克束缚态，若不考虑夸克轨道角动量，则每个重子的磁矩正是其含的三个夸克磁矩的算术和，即

$$\frac{1}{2m}\sum_{夸克} Q\vec{\sigma} \tag{7.6.12}$$

如果利用(7.5.4)式给出的重子 Λ° 的夸克波函数，并假设 u，d，s 三种夸克具有相同质量，则有

$$\mu_{\Lambda^\circ}=\langle\Lambda^\circ,\frac{1}{2}|Q\sigma_3|\Lambda^\circ,\frac{1}{2}\rangle=-\frac{1}{3}\mu \tag{7.6.13}$$

因此 $su(6)$ 予言 Λ° 与质子的磁矩比为

$$\frac{\mu_{\Lambda^\circ}}{\mu_p}=-\frac{1}{3},\quad \mu_{\Lambda^\circ}=-0.93 \tag{7.6.14}$$

然而实验上测得

$$\mu_{\Lambda^\circ}=-0.614\pm0.005$$

这说明奇异夸克 s 的质量可能与 u 和 d 夸克质量不同，因 u 与 d 夸克是同一个同位旋二重态，在略去电磁作用后，可认为 $m_u=m_d=m$，在静态条件下，可取 $m_p=m_n=3m$，而 $m_{\Lambda^\circ}=2m+m_s$，由此可推得

$$m_s=\frac{3m_{\Lambda^\circ}-2m_p}{3}=490\text{MeV}$$

$$m=\frac{1}{3}m_p=310\text{MeV}$$

以核子磁矩为单位，则有

$$\frac{\mu_{\Lambda^\circ}}{2m_p}=\sum_q\frac{1}{2m_q}Q\sigma_3 \tag{7.6.15}$$

利用已给出的重子 Λ° 的夸克波函数，不难求得

$$\mu_{\Lambda^\circ}=-0.64$$

此值与实验结果基本符合，由此可看出唯象夸克模型对精确 $su(6)$ 对称性有相当好的修正。

习 题 七

7—1 证明李代数 $su(2)$ 与 $so(3)$ 是同构的。

7—2 试证明李代数 $su(N)$ 包含一个子代数 $su(N-1)$，并做出 $su(3)$ 基础表示相对 $su(2)$ 不可约表示的分支律。

7—3 试做出 $su(4)$ 李代数的根图及其各个基础表示的权图。

7—4 试画出李代数 $su(3)$ 不可约表示 $\{5,3\}$ 的权图，并标明每个权矢的多重数。

7—5 试求出李代数 G_2 不可约表示 $\{2,0\}$ 和 $\{0,3\}$ 的最高权及其表示维数。

7—6 结合第四章的杨图方法与本章的根权方法，对比讨论李代数 $su(3)$ 以下不可约表示的直积约化：

(1) $\{1,0\}\otimes\{1,0\}$，　　(2) $\{1,0\}\otimes\{1,0\}\otimes\{0,1\}$，

(3) $\{1,0\}\otimes\{0,2\}$，　　(4) $\{1,1\}\otimes\{1,1\}$

7—7 试验证李代数 G_2 不可约表示 $\{0,1\}\otimes\{0,1\}=\{1,0\}\oplus\{0,2\}\oplus\{0,1\}\oplus\{0,0\}$。

7—8 按照 $su(3)$ 夸克模型，试给出 10 重态重子 Σ^{+*} 和 Ξ^{-*} 的夸克波函数。

7—9 若以(7.4.4)式给出的矩阵 M 代表赝标介子 8 重态，并以矩阵元 $\langle M|H|M\rangle=m^2$ 代表静态介子质量平方，试导出赝标介子的盖尔曼-欧匹巴质量关系，并以实验值验证之。

7—10 按照 $su(6)$ 夸克模型，试讨论重子 Σ^+，Σ^-、Ξ^- 和 Ω^- 的磁矩，并与实验值进行比较。

主要参考文献

〔1〕A. W. Joshi, **Elements of Group Theory for Physicists**, 1977.（中译本，王锡绂等译，**物理学中的群论基础**，科学出版社，1982 年）。

〔2〕W. Miller, **Symmetry Groups and Their Applications**, 1972.（中译本，栾德怀等译，**对称性群及其应用**，科学出版社，1981

年)。

〔3〕M. Hamermesh, **Group Theory and Its Application to Physical Problems**, 1962。

〔4〕B. G. Wybourne, **Classical Groups for Physicists**, 1974。(中译本,冯承天等译,**典型群及其在物理学上的应用**,科学出版社,1982年)。

〔5〕J. P. Elliott et. al. , **Symmetry in Physics**, 1979. (中译本,仝道荣译,**物理学中的对称性**,科学出版社,1986年)。

〔6〕H. Bacry, **Lectures on Group Theory and Particle Theory** 1977。

〔7〕R. D. Richtmyer, **Principles of Advanced Mathematical Physics**, 1981。

〔8〕B. L. Vander, **Group Theory and Quantum Mechanics**, 1974。

〔9〕F. W. Byron, et. al. , **Mathematics of Classical and Quantum Physics**, 1976。

〔10〕孙洪洲,韩其智,**群论**,北京大学出版社,1987年。

〔11〕H. Georgi, **Lie Algebras in Particle Physics**, 1982。

〔12〕R. Gilmore, **Lie Groups, Lie Algebras and some of Their Applications**, 1974。

〔13〕陈金全,**群表示论的新途径**,上海科学技术出版社,1984年。

〔14〕H. Bacry, **Atomic Structure**, 1980。

〔15〕M. Carmeli, **Group theory and General Relativity**, 1977。

〔16〕J. M. Ziman, **Elements of Advanced Quantum Theory**, 1969. (Chapter 7)。

〔17〕马中骐,戴安英,**群论及其在物理中的应用**,北京理工大学出版社,1988年。

〔18〕E. U. Condon, H. Odabasi, **Atomic Structure**, 1980。

〔19〕D. C. Harris, M. D. Bertolucci, **Symmetry and Spectroscopy**, 1978。

〔20〕丁培柱，王毅，**群及其表示**，高等教育出版社，1990 年。

〔21〕徐振环，**群论导引**，黑龙江科技出版社，1985 年。

〔22〕程国均，**群表示论及其在量子力学中的应用**，四川大学出版社，1988 年。

〔23〕E. M. Loebl, **Group Theory and Its Applications**, 1968。

〔24〕J. F. Cornwell, **Group Theory in Physics**, 1984。